2

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

第四版



责任编辑 宋 涛 邱 蕾
封面设计 庞 婕 孙 佳

新版推荐
经典Б.П.吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解（共六册）

- 1 分析引论 定价：19.00元
- 2 单变量函数的微分学 定价：19.00元
- 3 不定积分 定积分 定价：20.00元
- 4 级数 定价：19.00元
- 5 多变量函数的微分法 带参数的积分 定价：22.00元
- 6 重积分和曲线积分 定价：19.00元

数学分析习题集精选精解 定价：39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案 定价：39.00元

高等数学习题精选精解 定价：39.80元


ISBN 978-7-5331-5899-6
9 787533 158996
定价：19.00 元

2

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 2/费定晖，周学圣编演.—4版.—济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5899-6

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①费… ②周… Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120151 号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解 2

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531)82098071
印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031 电话：(0536)2116806

开本：787 mm×1092mm 1/16
印张：14
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5899-6
定价：19.00 元

第四版前言

本书自 1979 年出版发行以来，历经 30 多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析"不可替代"之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书 4462 题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，"只看不练假把式"，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解，更不要查抄解答和答案，而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考，必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题，然后再查看书中是怎样解答的，比较自己的解答和书中解答的异同，从中找出差距，找出自己的问题所在，甚至找出书中解答的的错误和不足之处，进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能，任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力，责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血，在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订，面对如此庞大的图书，限于本人水平，书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在新版中改正。

费 定 晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录

第二章　一元函数微分学

§1.　显函数的导数

1° **导数的定义**　若 x 及 $x_1=x+\Delta x$ 为自变量的值,则差

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

称为函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[x,x_1]$ 上的**增量**. 表达式

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

若有意义,则称为导数,而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为*可微函数*.

导数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 点切线的斜率 $[\tan\alpha=f'(x)]$(图 2.1).

2° **求导数的基本法则**　若 c 为常数且函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ 都有导数,则

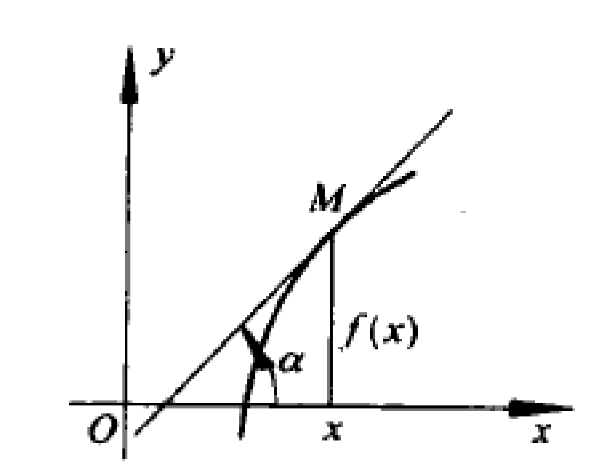


图 2.1

(1) $c'=0$;　(2) $(cu)'=cu'$;

(3) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;　(4) $(uv)'=u'v+v'u$;

(5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$　$(v\neq 0)$;　(6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$　(n 为常数);

(7) 若函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都有导数,则 $y'_x=y'_u u'_x$.



3° **基本公式**　若 x 为自变量*,则

Ⅰ. $(x^n)'=nx^{n-1}$(n 为常数);

Ⅱ. $(\sin x)'=\cos x$;

Ⅲ. $(\cos x)'=-\sin x$;

Ⅳ. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

Ⅴ. $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;

Ⅵ. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Ⅶ. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Ⅷ. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

Ⅸ. $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;

Ⅹ. $(a^x)'=a^x\ln a$　$(a>0)$; $(e^x)'=e^x$;

Ⅺ. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　($a>0$ 且 $a\neq 1$); $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

Ⅻ. $(\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{ch}\, x$;

ⅩⅢ. $(\mathrm{ch}\, x)'=\mathrm{sh}\, x$;

ⅩⅣ. $(\mathrm{th}\, x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

ⅩⅤ. $(\mathrm{cth}\, x)'=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

4° **单侧导数**　表达式

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的*左导数*和*右导数*.

---

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中,一些明显的定义域要求,例如,本节公式Ⅴ中要求 $x\neq k\pi$(k 为整数),Ⅵ中要求 $|x|<1$ 等等. 以及例如尔后 §5 中相应的限制,一般地就不再一一声明.

《题解》作者注

导数 $f'(x)$存在的充分必要条件是

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

5° **无穷导数** 若函数 $f(x)$在点 x 连续，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$在点 x 有无穷导数. 在此种情形下，函数 $y=f(x)$的图像在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

【821】 若 x 由 1 变到 1000，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的相应增量 Δy.

解 $\Delta x=1000-1=999$； $\Delta y=\lg 1000-\lg 1=3$.

【822】 若 x 由 0.01 变到 0.001，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的相应增量 Δy.

解 $\Delta x=0.001-0.01=-0.009$； $\Delta y=\frac{1}{(0.001)^2}-\frac{1}{(0.01)^2}=990000$.

【823】 设：(1) $y=ax+b$；(2) $y=ax^2+bx+c$；(3) $y=a^x$. 若变量 x 的增量为 Δx，求增量 Δy.

解 (1) $\Delta y=[(ax+a\Delta x)+b]-[ax+b]=a\Delta x$；

(2) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-[ax^2+bx+c]=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$；

(3) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

【824】 证明：(1) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$；

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

提示 由增量的定义，命题即获证.

证 (1) $\Delta[f(x)+g(x)]=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x),$$

于是，$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$；

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$$

$$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x),$$

于是，$\Delta[f(x)\ g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样，我们还可将(2)的结果写成 $\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)$.

【825】 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$引割线 AA'，求此割线的斜率，设：

(1) $\Delta x=1$； (2) $\Delta x=0.1$； (3) $\Delta x=0.01$； (4) Δx 为任意小量.

在该曲线上 A 点的切线的斜率等于什么？

解 割线 AA'的斜率 $k_{AA'}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x$，

(1) $k_{AA'}=5$； (2) $k_{AA'}=4.1$； (3) $k_{AA'}=4.01$； (4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是，在 A 点的切线斜率为

$$k_A=\lim_{A'\to A}k_{AA'}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$$

【826】 利用函数 $y=x^3$ 把 Ox 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 映射到 Oy 轴上. 求其平均伸长系数. 设：

(1) $h=0.1$； (2) $h=0.01$； (3) $h=0.001$，

计算此系数的值. 当 $x=1$ 时伸长的系数等于什么？

解 平均伸长系数 $\bar{l}=\frac{(1+h)^3-1^3}{h}=3+3h+h^2$，

(1) $\bar{l}=3+3(0.1)+(0.1)^2=3.31$；

(2) $\bar{l}=3+3(0.01)+(0.01)^2=3.0301$；

(3) $\bar{l}=3+3(0.001)+(0.001)^2=3.003001$.

于是，$l\Big|_{x=1}=\lim\limits_{h\to 0}\bar{l}=3$.

【827】 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式给出

$$x=10t+5t^2,$$

式中 t 以 s(秒)计的时间，x 为以 m(米)计的距离. 求在 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设：

(1)$\Delta t=1$；(2)$\Delta t=0.1$；(3)$\Delta t=0.01$，

计算此速度的值. 当 $t=20$ 时运动的速度等于什么？

解 平均速度

$$\bar{v}=\{[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-[10\times 20+5\times 20^2]\}\div\Delta t=210+5\Delta t\ \text{(m/s)},$$

(1) $\bar{v}=210+5\times 1=215$ (m/s)；

(2) $\bar{v}=210.5$ (m/s)；

(3) $\bar{v}=210.05$ (m/s).

于是，$v\Big|_{t=20}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(210+5\Delta t)=210$ (m/s).

【828】 根据导数的定义，直接求下列函数的导数：

(1)x^2；(2)x^3；(3)$\frac{1}{x}$；(4)$\sqrt{x}$；(5)$\sqrt[3]{x}$；

(6)$\tan x$；(7)$\cot x$；(8)$\arcsin x$；(9)$\arccos x$；(10)$\arctan x$.

解 (1) $y=x^2$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

(2) $y=x^3$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2$.

(3) $y=\frac{1}{x}$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=-\frac{1}{x(\Delta x+x)}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x(\Delta x+x)}\right]=-\frac{1}{x^2}$.

(4) $y=\sqrt{x}$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

(5) $y=\sqrt[3]{x}$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x\neq 0)$.

(6) $y=\tan x$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\frac{\frac{\tan x+\tan\Delta x}{1-\tan x\tan\Delta x}-\tan x}{\Delta x}=\frac{\tan\Delta x(1+\tan^2 x)}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}=\frac{\tan\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\tan\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$　$(x\neq(2k-1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(7) $y=\cot x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cot(x+\Delta x)-\cot x}{\Delta x}=\frac{\frac{\cot x\cot\Delta x-1}{\cot x+\cot\Delta x}-\cot x}{\Delta x}=\frac{-1-\cot^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}=-\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}.$$

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\csc^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$　$(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(8) $y=\arcsin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}=\frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x\Delta x)^2}]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，从而，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(|x|<1)$，

其中$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$.

(9) $y=\arccos x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}=\frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2})-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，从而，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(|x|<1)$.

(10) $y=\arctan x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}=\frac{\arctan\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\arctan\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

于是，
$$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\arctan\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}\right]=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1$.

【829】 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，求 $f'(1)$，$f'(2)$和 $f'(3)$.

解 $f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

$=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9)$.

于是，$f'(1)=-8$；　$f'(2)=f'(3)=0$.

【830】 设 $f(x)=x^2\sin(x-2)$，求 $f'(2)$.

解 $f'(x)=2x\sin(x-2)+x^2\cos(x-2)$. 于是，$f'(2)=4$.

【831】 设 $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$，求 $f'(1)$.

提示 从导数定义出发，易得 $f'(1)=1+\frac{\pi}{4}$.

解 解法 1：若用复合函数求导法，可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是，$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}$.

解法 2：若按定义作，注意到当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)=1+\frac{\pi}{4}.$$

【832】 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微，求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

解 设 $\Delta x=x-a$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$. 于是，得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

【833】 证明：若函数 $f(x)$ 可微及 n 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之，若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在，则可否断定此函数有导数？研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章 734 题).

提示 由导数定义易证(1)式成立. 然其逆不成立，可研究 734 题所示的狄利克雷函数 $\chi(x)$：

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]}{\frac{1}{n}}=f'(x)$.

反之，就不一定对了. 例如，对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的，当然其导数也不存在. 但由于 $x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 x 为有理数时，

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而，极限(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$ 存在.

利用导数表，求下列函数的导数：

【834】 $y=2+x-x^2$.

问 $y'(0)$；$y'\left(\frac{1}{2}\right)$；$y'(1)$；$y'(-10)$ 等于什么？

解 由于 $y'(x)=1-2x$，故得

$y'(0)=1$； $y'\left(\frac{1}{2}\right)=0$； $y'(1)=-1$； $y'(-10)=21$.

【835】 $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. 当 x 为何值时：

(1) $y'(x)=0$； (2) $y'(x)=-2$； (3) $y'(x)=10$?

提示 先求出 $y'(x)=x^2+x-2$，再利用所给条件解方程，即得所要求的 x 值.

解 $y'(x)=x^2+x-2$.

(1)令 $y'(x)=0$，得 $x^2+x-2=0$. 于是，$x=-2$ 或 $x=1$；

(2)令 $y'(x)=-2$，得 $x^2+x=0$. 于是，$x=-1$ 或 $x=0$；

(3)令 $y'(x)=10$，得 $x^2+x-12=0$. 于是，$x=-4$ 或 $x=3$.

【836】 $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

解 $y'=10a^3x-5x^4$.

【837】 $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y'=\frac{a}{a+b}$.

【838】 $y=(x-a)(x-b)$.

解 $y'=x-a+x-b=2x-a-b$.

【839】 $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y'=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$=(x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)+2(x+1)(x+3)+3(x+1)(x+2)]$

$=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$.

【840】 $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

解 $y'=\sin\alpha(x\cos\alpha-\sin\alpha)+\cos\alpha(x\sin\alpha+\cos\alpha)=x\sin2\alpha+\cos2\alpha$.

【841】 $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

解 $y'=mnx^{m-1}(1+mx^n)+mnx^{n-1}(1+nx^m)=mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1}]$.

【842】 $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解 $y'=-(1-x^2)^2(1-x^3)^3-4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3-9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$

$=-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$

$=-(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2$.

【843】 $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

解 $y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)$ $(x\neq0)$.

【844】 证明：公式 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

提示 利用商的求导法则及行列式的定义.

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$. 这里已暗设 $cx+d\neq0$.

求下列函数的导数：

【845】 $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

解 $y'=\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x|\neq1)$.

【846】 $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解　由于 $y=\frac{2}{1-x+x^2}-1$，故 $y'=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

【847】　$y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

解　$y'=\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x[3(1+x)^2(1-x)^2-2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}=\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$　$(|x|\neq 1)$.

【848】　$y=\frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

解　$y'=\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$

$=\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$　$(x\neq 1)$.

【849】　$y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

解　$y'=\frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q-q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}=-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$　$(x\neq -1)$.

【850】　$y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

解　$y'=\frac{[px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}](1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$

$=\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$　$(x\neq -1)$.

【851】　$y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

解　$y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$　$(x>0)$.

【852】　$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

解　$y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)$　$(x>0)$.

【853】　$y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

解　$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$　$(x>0)$.

【854】　$y=x\sqrt{1+x^2}$.

解　$y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

【855】　$y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

解　$y'=\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}}+\frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right]=\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$

$(x\neq\sqrt[3]{-3})$.

【856】　$y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

解　$y'=\frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n)\sqrt[m+n]{[(1-x)^m(1+x)^n]^{m+n-1}}}=\frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}$　$(|x|\neq 1)$.

【857】　$y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$　$(|x|<|a|)$.

【858】 $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

解 $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}\cdot\frac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2}=\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}\quad(|x|\neq1)$.

【859】 $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $y'=-\frac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left[\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+2x\right]=-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

【860】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\quad(x>0)$.

【861】 $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

解 $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}$

$(x\neq0,\ x\neq-1,\ x\neq-8)$.

【862】 $y=\cos2x-2\sin x$.

解 $y'=-2\sin2x-2\cos x=-2\cos x(1+2\sin x)$.

【863】 $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

解 $y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x+2x\cos x=x^2\sin x$.

【864】 $y=\sin(\cos^2x)\cos(\sin^2x)$.

解 $y'=-2\sin x\cos x\cos(\cos^2x)\cos(\sin^2x)-2\sin x\cos x\sin(\cos^2x)\sin(\sin^2x)$

$=-\sin2x[\cos(\cos^2x)\cos(\sin^2x)+\sin(\cos^2x)\sin(\sin^2x)]$

$=-\sin2x\cos(\cos^2x-\sin^2x)$

$=-\sin2x\cos(\cos2x)$.

【865】 $y=\sin^nx\cos nx$.

解 $y'=n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx-n\sin^nx\sin nx=n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx-\sin x\sin nx)=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

【866】 $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

解 $y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$.

【867】 $y=\frac{\sin^2x}{\sin x^2}$.

解 $y'=\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2x^2}\quad(x^2\neq k\pi;\ k=1,2,\cdots)$.

【868】 $y=\frac{\cos x}{2\sin^2x}$.

解 $y'=\frac{-2\sin^3x-4\sin x\cos^2x}{4\sin^4x}=-\frac{1+\cos^2x}{2\sin^3x}\quad(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【869】 $y=\frac{1}{\cos^nx}$.

解 $y'=-\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x)=\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}\quad(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi$；$k$ 为整数).

【870】 $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

解 $y'=\frac{1}{(\cos x+x\sin x)^2}[(x\sin x-\cos x+\cos x)(\cos x+x\sin x)-(\sin x-\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)]$

$$=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}.$$

【871】 $y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$.

解 $y'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}=\frac{2}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【872】 $y=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$.

解 $y'=\sec^2 x-\tan^2 x\sec^2 x+\tan^4 x\sec^2 x=1+\tan^6 x$ $(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【873】 $y=4\sqrt[3]{\cot^2 x}+\sqrt[3]{\cot^8 x}$.

解 $y'=\frac{8}{3}(\cot x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)+\frac{8}{3}(\cot x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)=-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\cot x}}$

$(x\neq k\pi;\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【874】 $y=\sec^2\frac{x}{a}+\csc^2\frac{x}{a}$.

解 $y'=\frac{2}{a}\sec^2\frac{x}{a}\tan\frac{x}{a}-\frac{2}{a}\csc^2\frac{x}{a}\cot\frac{x}{a}=\frac{2}{a}\left(\frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos^3\frac{x}{a}}-\frac{\cos\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}}\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{a}-\cos^4\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}$

$=\frac{16\left(\sin^2\frac{x}{a}-\cos^2\frac{x}{a}\right)}{a\left(2\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^3}=\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$ $(x\neq\frac{k\pi a}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【875】 $y=\sin[\cos^2(\tan^3 x)]$.

解 $y'=\cos[\cos^2(\tan^3 x)][-2\cos(\tan^3 x)\sin(\tan^3 x)][3\tan^2 x\sec^2 x]$

$=-3\tan^2 x\sec^2 x\cdot\sin(2\tan^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\tan^3 x)]$ $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【876】 $y=e^{-x^2}$.

解 $y'=-2xe^{-x^2}$.

【877】 $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$.

解 $y'=-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\cdot 2^{\tan\frac{1}{x}}\ln 2$ $(x\neq0)$.

【878】 $y=e^x(x^2-2x+2)$.

解 $y'=e^x(x^2-2x+2)+e^x(2x-2)=x^2e^x$.

【879】 $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

解 $y'=-e^{-x}\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]+e^{-x}\left[\frac{1-x^2}{2}\cos x-x\sin x+\frac{(1+x)^2}{2}\sin x-(1+x)\cos x\right]$

$=x^2e^{-x}\sin x$.

【880】 $y=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)$.

解 $y'=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}e^x\csc^2\frac{x}{2}=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi$；k 为整数).

【881】 $y=\frac{\ln3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

解 $y'=\frac{3^x(\ln3\cdot\cos x-\sin x)-3^x\ln3(\ln3\cdot\sin x+\cos x)}{3^{2x}}=-\frac{(1+\ln^2 3)\sin x}{3^x}$.

【882】 $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}[a(a\sin bx-b\cos bx)+(ab\cos bx+b^2\sin bx)]=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin bx$.

【883】 $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

解 $y'=e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

【884】 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a>0,b>0)$.

提示 两边取对数后,同时对 x 求导数.

解 两边取对数,得

$$\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a).$$

两边同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}.$$

于是, $y'=y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right) \quad (x>0)$.

【885】 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x} \quad (a>0)$.

解 $y'=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

【886】 $y=\lg^3 x^2$.

解 $y'=3\lg^2 x^2\cdot\frac{1}{x^2}2x\lg e=\frac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2 x^2 \quad (x\neq 0)$.

或按 $y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3 e\cdot\ln^3|x|$ 求导数,有 $y'=24\lg^3 e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)} \quad (x\neq 0)$.

*) $(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}$,以后不再说明.

【887】 $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

解 $y'=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)} \quad (x>e)$.

【888】 $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

解 $y'=\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot 2\ln(\ln^3 x)\frac{1}{\ln^3 x}\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)} \quad (x>e)$.

【889】 $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

解 $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} \quad (x>-1)$.

【890】 $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

解 $y'=\frac{1}{4}[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)]'=\frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right]=\frac{x}{x^4-1} \quad (|x|>1)$.

【891】 $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

解 $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)$,

$y'=-\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3=\frac{1}{x(1+x^4)^2} \quad (x\neq 0)$.

【892】 $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解 $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}[\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}|-\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|]$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3x^2-2}\quad\left(|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

【893】[+*] $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\quad(0<k<1)$.

解 $y'=\frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}\quad(|x|<1)$.

【894】 $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}=\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}\quad(x>-1)$.

【895】 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

【896】 $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

解 $y'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$[*)] $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

*） 利用 895 题的结果，下同，不再说明.

【897】 $y=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$.

解 $y'=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$-2\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2$

$=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$.

【898】 $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

解 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}$.

【899】 $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\quad(a>0,b>0)$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{a-bx^2}\quad\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

【900】 $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

解 $y'=\frac{6x^5-4x^3(2+3x^2)}{x^8}\sqrt{1-x^2}-\frac{x(2+3x^2)}{x^4\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{1+\sqrt{1-x^2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{3}{x}$

$=-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}\quad(0<|x|<1)$.

【901】 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$.

---

* 题号右上角带"＋"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的．俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

解 $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi$; k 为整数).

【902】 $y=\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

解 $y'=\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\frac{1}{\cos x}$ $\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}\right.$; k 为整数).

【903】⁺ $y=\frac{1}{2}\cot^2x+\ln\sin x$.

解 $y'=-\cot x\cdot\csc^2x+\frac{\cos x}{\sin x}=-\cot^3x$ $(0<x-2k\pi<\pi$; k 为整数).

【904】 $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

解 $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=-\frac{1}{\cos x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi\right.$; k 为整数).

【905】 $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

解 $y'=\frac{\sin^3x+2\sin x\cos^2x}{2\sin^4x}+\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{\cos^2x}{\sin^3x}$ $(0<x-2k\pi<\pi$; k 为整数).

【906】 $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$ $(0\leqslant|a|<|b|)$.

解 当 $a=0$ 时，$y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$. 由于 $1+\sin x$ 非负，为使对数有意义，必须有

$$\begin{cases}1+\sin x>0,\\ \cos x>0.\end{cases}$$

当 $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$ (k 为整数)时，上述不等式成立. 在此区域内，得

$$y'=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

当 $a\neq0$ 时，记 $y=\ln u(x)$，而

$$u(x)=\frac{1+\frac{a}{b}\cos x+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\sin x}{\frac{a}{b}+\cos x}=\frac{1+\cos\varphi_0\cos x+\sin\varphi_0\sin x}{\cos\varphi_0+\cos x}=\frac{1+\cos(x-\varphi_0)}{\cos x+\cos\varphi_0}=\frac{v_1(x)}{v_2(x)},$$

其中 $\varphi_0=\arctan\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x)\geqslant0$. 为保证 y 可导，首先必须有 $u(x)>0$，故应有 $v_1(x)\neq0$（从而，$v_1(x)>0$），进而应有 $v_2(x)>0$. 于是，y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases}v_1(x)\neq0,\\ v_2(x)>0\end{cases}$$

的一切 x 值，记成 $R=\{x\,|\,v_1(x)\neq0,\ v_2(x)>0\}$，则

$$R=\{x\,|\,\cos x+\cos\varphi_0>0\ \text{ 且 }\ x\neq(2k+1)\pi+\varphi_0;\ k\text{ 为整数}\}.$$

在此区域内，得

$$y'=\frac{-\sin(x-\varphi_0)}{1+\cos(x-\varphi_0)}+\frac{\sin x}{\cos x+\cos\varphi_0}=\frac{-\sin x\cos\varphi_0+\cos x\sin\varphi_0}{1+\cos x\cos\varphi_0+\sin x\sin\varphi_0}+\frac{\sin x}{\cos x+\cos\varphi_0}$$

$$=\frac{-\frac{a}{b}\sin x+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cos x}{1+\frac{a}{b}\cos x+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x+\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x},$$

其实此结果也包含了 $a=0$ 时的情形.

【907】 $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

解 $y'=-\frac{1}{x^2}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x+\frac{6}{x}\ln x+\frac{6}{x}\right)=-\frac{\ln^3 x}{x^2}\quad(x>0)$.

【908】 $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

解 $y'=-\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^5}+\frac{1}{4x^5}=\frac{1}{x^5}\ln x\quad(x>0)$.

【909】[+] $y=\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$.

解 $y'=\frac{3}{2}\cdot 2\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)\left[-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right]+\frac{3}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}=\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$.

【910】 $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

解
$$y'=\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}\quad(x>0).$$

【911】 $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

解 $y'=[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x)+\frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]=2\sin(\ln x)\quad(x>0)$.

【912】[+] $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos x\ln\tan x$.

解 $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\frac{1}{\tan x}\sec^2 x=\sin x\ln\tan x$

$\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2};\ k\text{ 为整数}\right)$.

【913】 $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\quad(|x|<2)$.

【914】 $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

解 $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\quad(|x-1|<\sqrt{2})$.

【915】 $y=\arctan\frac{x^2}{a}$.

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2}\cdot\frac{2x}{a}=\frac{2ax}{a^2+x^4}\quad(a\neq 0)$.

【916】 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{x}$.

解 $y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2+2}\quad(x\neq0).$

【917】 $y=\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}=\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\quad(x\geqslant0).$

【918】 $y=x+\sqrt{1-x^2}\arccos x$.

解 $y'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\quad(|x|<1).$

【919】 $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

提示 利用基本公式及求导法则，求得 $y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ 的过程中，读者可能认为其存在域仅为 $x>0$。但是，可以证明：在点 $x=0$ 处的右导数 $y'_+(0)=0$，它等于 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ 在点 $x=0$ 处的值。因此，y' 的存在域为 $x\geqslant0$。以后碰到类似情况，均作这样的理解，不再一一说明。

解 $y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\quad(x\geqslant0).$

【920】 $y=\arccos\frac{1}{x}$.

解 $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\quad(|x|>1).$

【921】 $y=\arcsin(\sin x)$.

提示 注意将所得结果化简，得

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\operatorname{sgn}(\cos x)\quad\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

解 $y'=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\operatorname{sgn}(\cos x)\quad\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;\ k\text{ 为整数}\right).$

【922】 $y=\arccos(\cos^2 x)$.

提示 注意将所得结果化简，得

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}=\frac{2\sin x\cos x}{|\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}}=\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\quad(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

解 $y'=\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}=\frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}}=\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\quad(x\neq k\pi;\ k\text{ 为整数}).$

【923】 $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

解 $y'=\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\quad\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2};\ k\text{ 为整数}\right).$

【924】 $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

提示 注意将所得结果化简，得

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<|x|<1).$$

解 $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<|x|<1).$

【925】 $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}\quad(x\neq1)$.

【926】 $y=\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

解 $y'=\frac{-1}{1+\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2}\cdot\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}=1$

$\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{4};\ k\text{ 为整数}\right)$.

【927】 $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)\quad(a>b\geqslant0)$.

解 $y'=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{a+b\cos x}$.

【928】 $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}\quad(x\neq0)$.

【929】 $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

解 $y'=-\frac{2}{\arccos^3(x^2)}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}\quad(|x|<1)$.

【930】 $y=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)$.

解 $y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^6}=\frac{1+x^4}{1+x^6}$.

【931】 $y=\ln(1+\sin^2x)-2\sin x\arctan(\sin x)$.

解 $y'=\frac{\sin2x}{1+\sin^2x}-2\cos x\cdot\arctan(\sin x)-\frac{\sin2x}{1+\sin^2x}=-2\cos x\cdot\arctan(\sin x)$.

【932】 $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

解 $y'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}}\cdot\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\quad(x>1)$.

【933】 $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\arctan\frac{x}{b}$.

解 $y'=\frac{1}{x+a}-\frac{x}{x^2+b^2}+\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{b\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}=\frac{a^2+b^2}{(x+a)(b^2+x^2)}\quad(x>-a)$.

【934】 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\quad(a>0)$.

解 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$.

【935】 $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

解 $y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{1+x^3}\quad(x\neq-1).$

【936】 $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$

解 $y'=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}(x^2-1)-2x^2\sqrt{2}}{(x^2-1)^2}$

$=\frac{1}{1+x^4}\quad(|x|\neq1).$

【937】 $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x.$

解 $y'=(\arcsin x)^2+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+2-2=(\arcsin x)^2\quad(|x|<1).$

【938】 $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y'=\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arccos x}{x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}+\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{\arccos x}{x^2}\quad(0<|x|<1).$

【939】 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

解 $y'=\frac{1}{1+(x^2-1)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{x\ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\quad(x>1).$

【940】 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$

解 $y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(|x|<1).$

【941】 $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$

解 $y'=\frac{1}{12}\left(\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1}-\frac{4x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2}\right]=\frac{x^3}{1+x^6}\quad\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

【942】 $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arccot}x^6.$

解 $y'=\frac{6x^5(1+x^{12})-12x^{17}}{(1+x^{12})^2}+\frac{6x^5}{1+x^{12}}=\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$

【943】$^+$ $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt{3}\arctan\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

解 $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})}-\frac{1}{2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)+\sqrt{3}\frac{1}{1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}$

$=-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}\quad(-\infty<x<1,\ x\neq0).$

【944】 $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1).$

【945】 $y=\operatorname{arccot}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ $(a>0)$.

解 $$y'=-\frac{1}{1+\dfrac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\sqrt{ax-x^2}-\dfrac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2}=\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}\quad(0<x<a).$$

【946】 $y=\dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$.

解 $$y'=-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}-\frac{3-x}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$(|x+1|<\sqrt{2})$.

【947】 $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\left[1+\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\right]-\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\left[\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2}\left[\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\quad(x\neq 0).$$

【948】 $y=\arctan(\tan^2x)$.

解 $$y'=\frac{1}{1+\tan^4x}\cdot 2\tan x\sec^2x=\frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\quad\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;\ k\text{ 为整数}\right).$$

【949】 $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

解 $$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right]-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\quad(0<|x|<1).$$

【950】 $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$.

解 $$y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\arctan x=\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x.$$

【951】 $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

解 $$y'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

【952】 $y=\arctan(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 $$y'=\frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

【953】 $y=\arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)$.

提示 注意将所得结果化简，得

$$\frac{1-\cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)^2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot(\cos x-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}=\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}\quad(\cos x\neq\cos\alpha).$$

解 $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)^2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cos x(1-\cos\alpha\cos x)-\sin\alpha\cos\alpha\sin^2 x}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)^2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot(\cos x-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}=\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}$$

$(\cos x\neq\cos\alpha$，即 $x\neq\alpha+2k\pi$，k 为整数$)$.

【954】 $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{x^2+2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}\quad(0<|x|<1).$$

【955】 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{1+x^4}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+x^4}-\frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}+\sqrt{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\quad(|x|\neq1).$$

【956】 $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y'=\frac{1}{(1+x^2)^2}\left[\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1+x^2)-2x^2\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$+\frac{3}{\sqrt{2}\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$=\frac{4}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1).$$

【957】+ $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$.

解 $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x^2-\cos x^2)^2}}\cdot2x(\cos x^2+\sin x^2)=-\frac{2x(\sin x^2+\cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$$

$$\left(0<|x|<\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi};\ k=0,1,2,\cdots\right).$$

【958】 $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$.

解 $$y'=\frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(x^2)}}+\frac{2x\sin(x^2)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2)}}=2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]$$

$(|x|\neq\sqrt{\frac{k\pi}{2}};\ k=0,1,2,\cdots)$.

【959】 $y=e^{m\arcsin x}[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)]$.

解

$$y'=e^{m\arcsin x}\left\{\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)]+\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)-\sin(m\arcsin x)]\right\}$$

$$=\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}}e^{m\arcsin x}\cos(m\arcsin x)\quad(|x|<1).$$

【960】 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

解 $y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

【961】 $y=x+x^x+x^{x^x}\quad(x>0)$.

解 $y'=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}(x^x\ln x)'=1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2x\right)$.

【962】 $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}\quad(a>0,\ x>0)$.

解 $y'=x^{x^a}\left(ax^{a-1}\ln x+\frac{x^a}{x}\right)+x^{a^x}\left(a^x\ln a\cdot\ln x+\frac{a^x}{x}\right)+a^{x^x}\cdot\ln a\cdot x^x(1+\ln x)$

$$=x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^xx^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)+x^xa^{x^x}\ln a(1+\ln x).$$

【963】 $y=\sqrt[x]{x}\quad(x>0)$.

提示 注意当 $x>0$ 时，$y=\sqrt[x]{x}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

解 $y'=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

【964】 $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

解题思路 分别对幂指函数 $(\sin x)^{\cos x}$ 及 $(\cos x)^{\sin x}$ 采用 884 题所示的方法，然后化简，其结果为 $(\sin x)^{\cos x+1}[\cot^2x-\ln(\sin x)]-(\cos x)^{\sin x+1}[\tan^2x-\ln(\cos x)](0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2}$，$k$ 为整数).

解 $y'=(\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2x}{\sin x}\right]+(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2x}{\cos x}\right]$

$=(\sin x)^{\cos x+1}[\cot^2x-\ln(\sin x)]-(\cos x)^{\sin x+1}[\tan^2x-\ln(\cos x)]\ (0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2}$，$k$ 为整数).

【965】+ $y=(\ln x)^x:x^{\ln x}$.

提示 注意当 $x>1$ 时，$(\ln x)^x:x^{\ln x}=\frac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln^2x}}=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2x}$.

解 $y=\frac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln^2x}}=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2x}$.

$$y'=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\{[x\ln(\ln x)]'-(\ln^2x)'\}=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}-\frac{2\ln x}{x}\right\}$$

$$=\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\{x\ln x\ln(\ln x)+x-2\ln^2x\}\quad(x>1).$$

【966】 $y=\lg_xe$.

解 由 $y=\lg_xe$ 推得 $y=\frac{1}{\ln x}$. 于是，$y'=-\frac{1}{x\ln^2x}=-\frac{1}{x}(\lg_xe)^2\quad(x>0,x\neq1)$.

【967】 $y=\ln(\mathrm{ch}x)+\frac{1}{2\mathrm{ch}^2x}$.

解 $y'=\mathrm{th}x-\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^3x}=\mathrm{th}^3x$.

【968】 $y=\frac{\text{ch}x}{\text{sh}^2x}-\ln\left(\coth\frac{x}{2}\right)$.

解 $y'=\frac{\text{sh}^3x-2\text{sh}x\text{ch}^2x}{\text{sh}^4x}+\frac{1}{2\text{sh}^2\frac{x}{2}\cdot\coth\frac{x}{2}}=-\frac{2}{\text{sh}^3x}\quad(x>0)$.

【969】 $y=\arctan(\text{th}x)$.

解 $y'=\frac{1}{1+\text{th}^2x}\cdot\frac{1}{\text{ch}^2x}=\frac{1}{\text{ch}2x}$.

【970】 $y=\arccos\left(\frac{1}{\text{ch}x}\right)$.

解 $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\text{ch}^2x}}}\left(-\frac{\text{sh}x}{\text{ch}^2x}\right)=\frac{\text{sgn}(\text{sh}x)}{\text{ch}x}\quad(x\neq0)$.

【971】 $y=\frac{b}{a}x+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\text{th}\frac{x}{2}\right)\quad(0\leqslant|b|<a)$.

解 $y'=\frac{b}{a}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\text{th}^2\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2\text{ch}^2\frac{x}{2}}=\frac{b}{a}+\frac{a^2-b^2}{a(b+a\text{ch}x)}=\frac{a+b\text{ch}x}{b+a\text{ch}x}$.

【972】 引入中间变量 $u=\cos^2x$ 求函数 $y=\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})$ 的导数.

解 $u=\cos^2x$， $y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$， $y'_x=y'_uu'_x$，而

$$y'_u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4x}},\quad u'_x=-2\cos x\sin x=-\sin2x,$$

于是，$y'_x=-\frac{\sin2x}{\sqrt{1+\cos^4x}}$.

利用 972 题所示的方法，求下列函数的导数：

【973】+ $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right]$.

提示 令 $u=\arccos x$.

解 设 $u=\arccos x$，则 $y=u^2\left(\ln^2u-\ln u+\frac{1}{2}\right)$. 由于

$$y'_u=2u\left(\ln^2u-\ln u+\frac{1}{2}\right)+u^2\left(\frac{2\ln u}{u}-\frac{1}{u}\right)=2u\ln^2u=2\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x),$$

$$u'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是，$y'_x=y'_uu'_x=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x)\quad(|x|<1)$.

【974】+ $y=\frac{1}{2}\arctan(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

提示 令 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$.

解 设 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$，则 $y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$. 由于

$$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},\quad u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是，$y'_x=y'_uu'_x=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\quad(x\neq0)$.

【975】 $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

提示 令 $u=\mathrm{e}^{-x^2}$.

解 设 $u=\mathrm{e}^{-x^2}$，则 $y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2)$. 由于

$$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}-\frac{u}{1-u^2}=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})}{(1-\mathrm{e}^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x=-2x\mathrm{e}^{-x^2},$$

于是，$y'_x=y'_uu'_x=\frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2}\arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})}{(1-\mathrm{e}^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}\quad(x\neq0)$.

【976】 $y=\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arccot}(a^{-x})$.

提示 令 $u=a^x$.

解 设 $u=a^x$，则 $y=\frac{u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}\operatorname{arccot}(u^{-1})$. 由于

$$y'_u=\frac{(1+u^2)-2u^2}{(1+u^2)^2}-\frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\cdot\operatorname{arccot}(u^{-1})-\frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}$$

$$=\frac{4u\operatorname{arccot}(u^{-1})}{(1+u^2)^2}=\frac{4a^x\cdot\operatorname{arccot}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$$u'_x=a^x\ln a,$$

于是，$y'_x=y'_uu'_x=\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arccot}(a^{-x})\quad(a>0)$.

【977】 求函数的导数并作函数及其导数的图像，设：

(1) $y=|x|$； (2) $y=x|x|$； (3) $y=\ln|x|$.

提示 (1) $y'=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 或记成 $y'=\frac{|x|}{x}\ (x\neq0)$.

以下各题均可利用此结果，不再说明.

(2)注意在分界点 $x=0$ 处，有 $y'\Big|_{x=0}=0$，从而有 $y'=2|x|$.

(3) $y'=\frac{1}{x}\ (x\neq0)$.

解 (1) $y=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ (图 2.2)

$$y'=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

或写成 $y'=\frac{|x|}{x}\ (x\neq0)$. 在 $x=0$ 时 y' 不存在. (图 2.3)

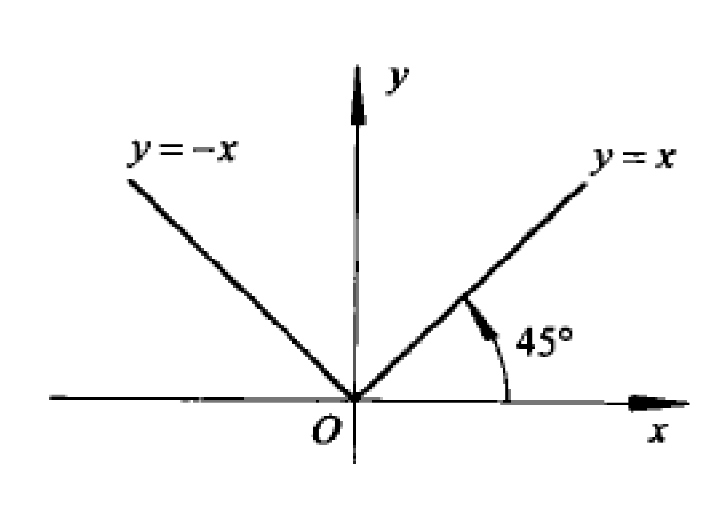


图 2.2

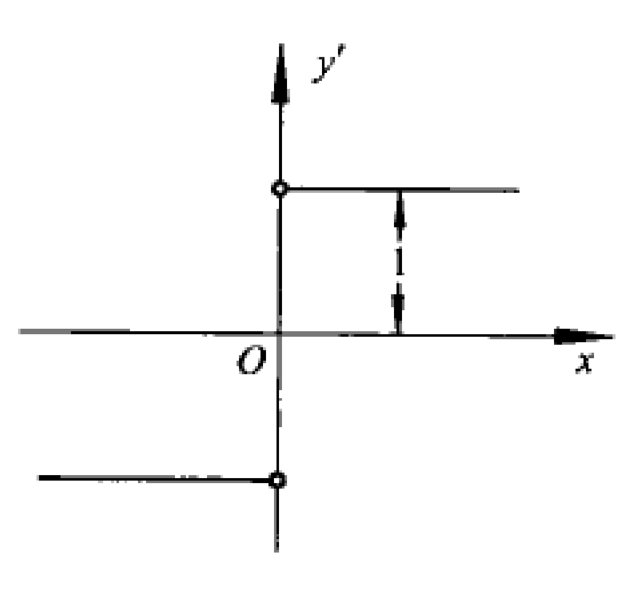


图 2.3

(2) $y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ -x^2, & x<0, \end{cases}$ （图 2.4）

$y'=\begin{cases} 2x, & x>0, \\ -2x, & x<0, \end{cases}$ 而且易见有 $y'\big|_{x=0}=0$，故 $y'=2|x|$ [*]．（图 2.5）

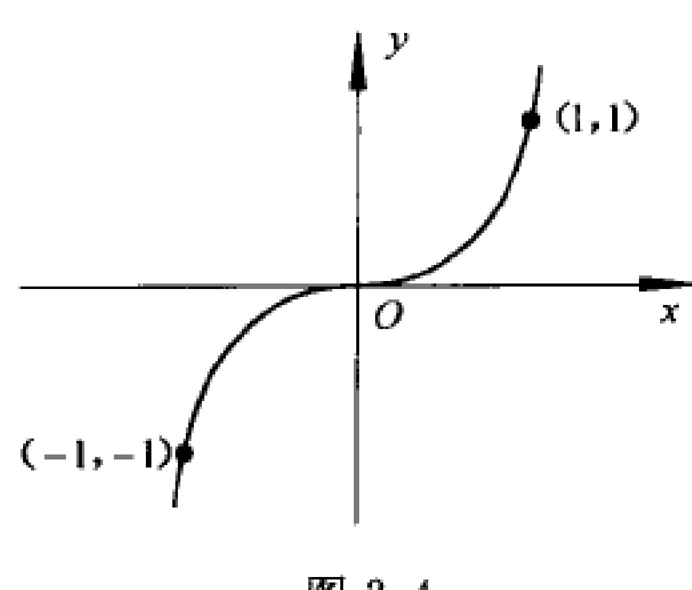


图 2.4

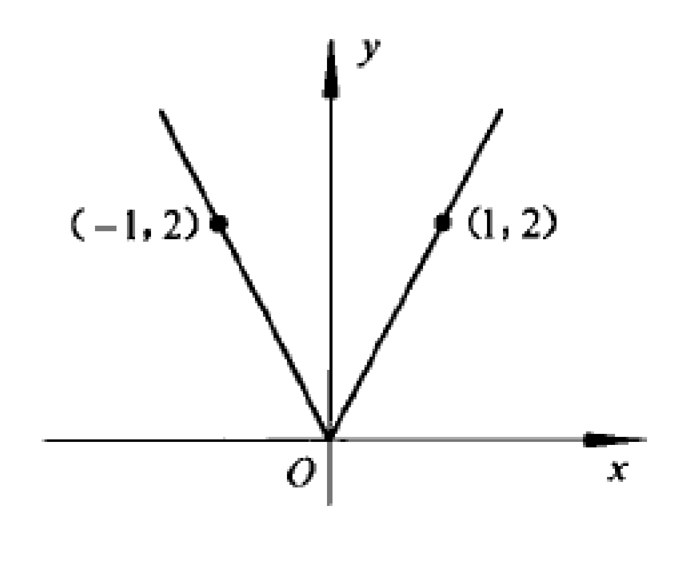


图 2.5

*） 以下各题，对于分界点的导数，不再单独讨论．

(3) $y=\ln|x|$，（图 2.6）

$y'=\dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$．（图 2.7）

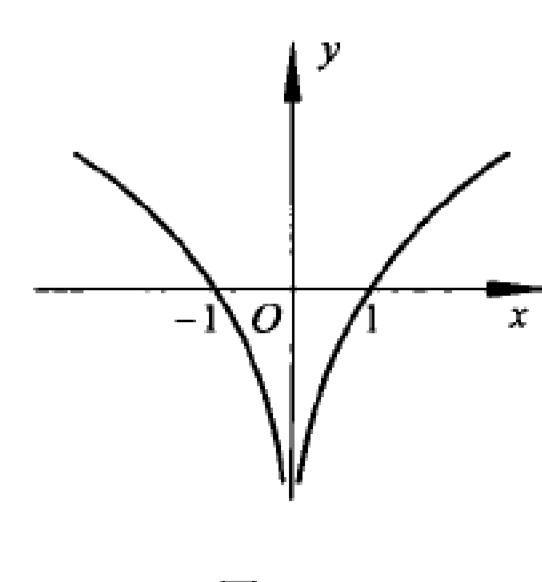


图 2.6

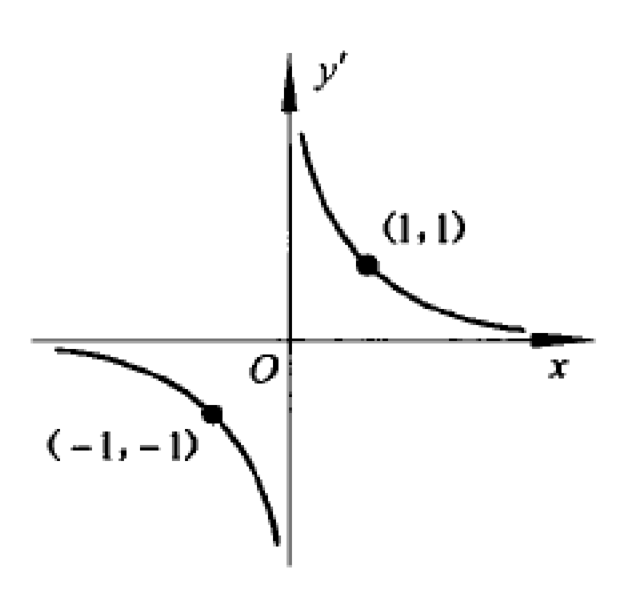


图 2.7

【978】 求下列函数的导数：

(1) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$； (2) $y=|\sin^3 x|$； (3) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$； (4) $y=[x]\sin^2\pi x$.

提示 (1)利用 977 题(1)的结果，有 $y'=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$ $(|x|\neq 1)$．(2)仿(1)．(3)仿(1)．(4) 对于 $y=[x]$ 有 $y'=0$ $(x\neq k;\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$．利用此结果，可知当 $x\neq k$ 时，有

$$([x]\sin^2\pi x)'=\pi[x]\sin 2\pi x,$$

易证当 $x=k$ 时，上式也成立．

解 (1) $y'=\dfrac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^2}[2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2]$

$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$ $(|x|\neq 1)$；

(2) $y'=\dfrac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x}3\sin^2 x\cos x=\dfrac{3}{2}\sin 2x\,|\sin x|$ （$x\neq k\pi$，k 为整数）；

(3) $y'=\left[-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\right]\left[-\left(\dfrac{|x|}{x\cdot x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$；

(4)对于 $y=[x]$ 有 $y'=0$ $(x\neq k,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，于是，当 $x\neq k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时，有

$$\{[x]\sin^2\pi x\}'=2\pi\sin\pi x\cos\pi x\cdot[x]=\pi[x]\sin 2\pi x.$$

容易直接验证当 $x=k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时上式也成立．

求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像：

【979】 $y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1,\\(1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\-(2-x), & 2<x<+\infty.\end{cases}$ （图 2.8）

解题思路 注意必须求函数 y 在其分段(界)点 $x=1$ 及 $x=2$ 处的左、右导数，若左、右导数存在而且相等，则函数在该点可导，否则函数在该点不可导. 从而确定该点是否在导数 y' 的定义域内.

以下的 980 到 983 题中均需这样考虑问题，否则会产生错误.

解 显然 $y'=\begin{cases}-1, & -\infty<x<1,\\2x-3, & 1<x<2,\\1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$

当 $x=1$ 时，右导数 $y'_+\big|_{x=1}=(2x-3)\big|_{x=1}=-1$，左导数 $y'_-\big|_{x=1}=-1$.

因此，点 $x=1$ 的导数存在，且 $y'\big|_{x=1}=-1$. 同理，可得 $y'\big|_{x=2}=1$. 于是，

$$y'=\begin{cases}-1, & -\infty<x<1,\\2x-3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\1, & 2<x<+\infty.\end{cases}\quad（图 2.9）$$

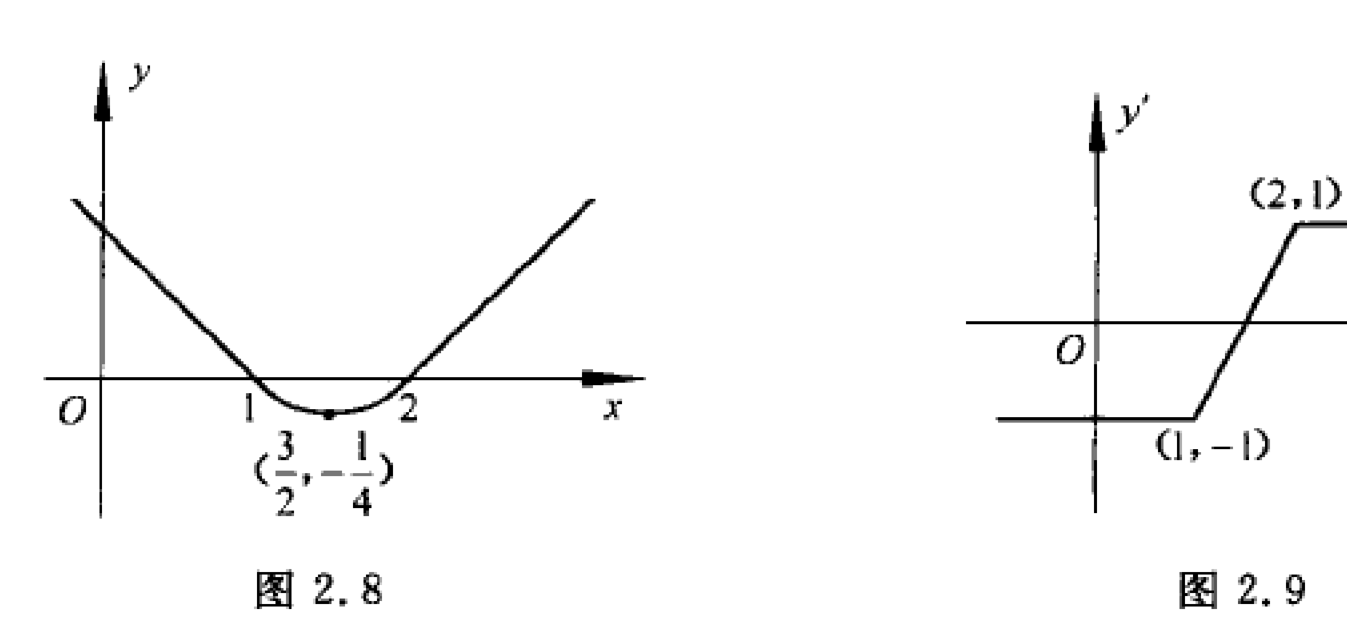


图 2.8　　　　图 2.9

注 在下面的 980 到 983 题中，求分段定义函数的导数时，在分段点，都要先求其左、右导数. 为简便计，我们只写出结果，而省去了(在分段点)求左、右导数的过程.

【980】 $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & a\leqslant x\leqslant b,\\0, & \text{在线段}[a,b]\text{之外}.\end{cases}$ （图 2.10）

解 $y'=\begin{cases}2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & x\in[a,b],\\0, & x\overline{\in}[a,b].\end{cases}$ （图 2.11）

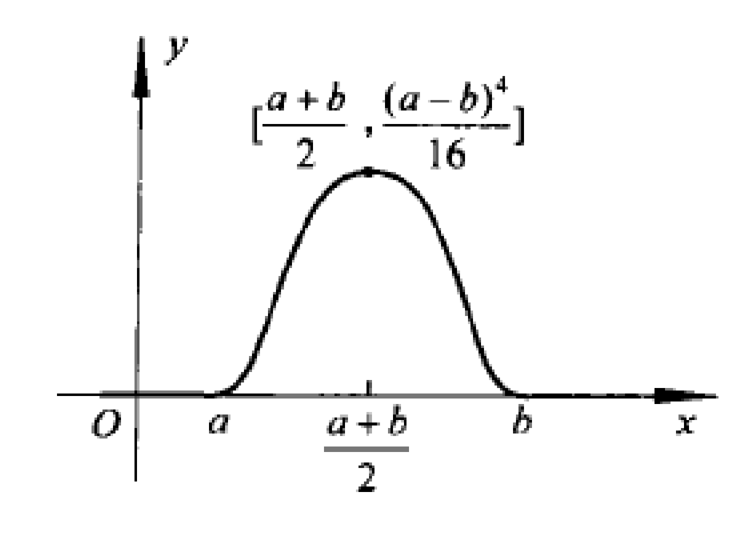


图 2.10

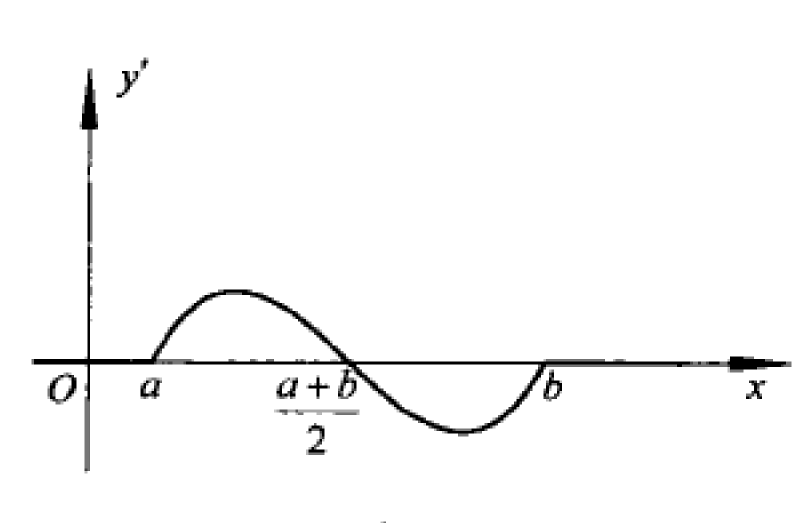


图 2.11

【981】 $y=\begin{cases}x, & x<0,\\\ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$ （图 2.12）

解 $y'=\begin{cases}1, & x<0,\\\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ （图 2.13）

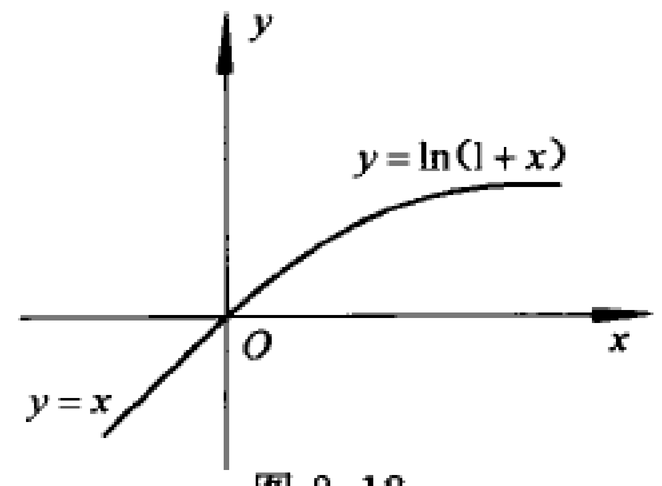


图 2.12

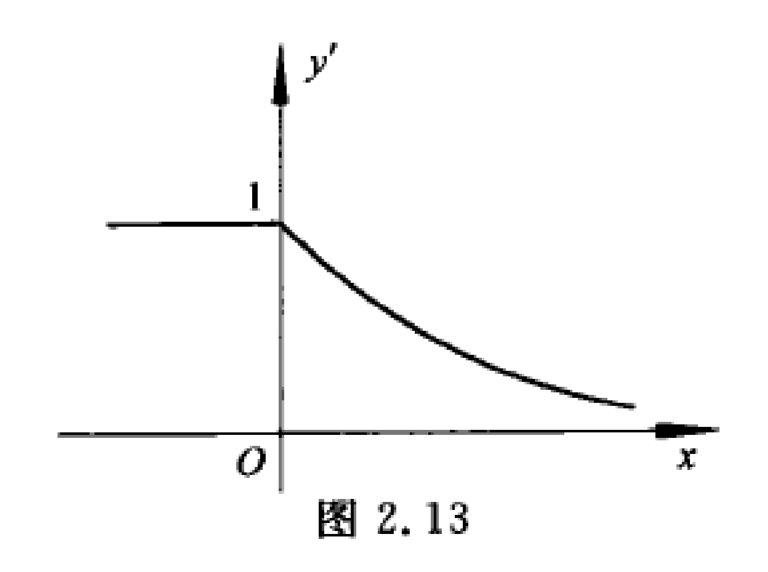


图 2.13

【982】[+] $y=\begin{cases}\arctan x, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$ （图 2.14）

解 $y'=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & -1<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$ （图 2.15）

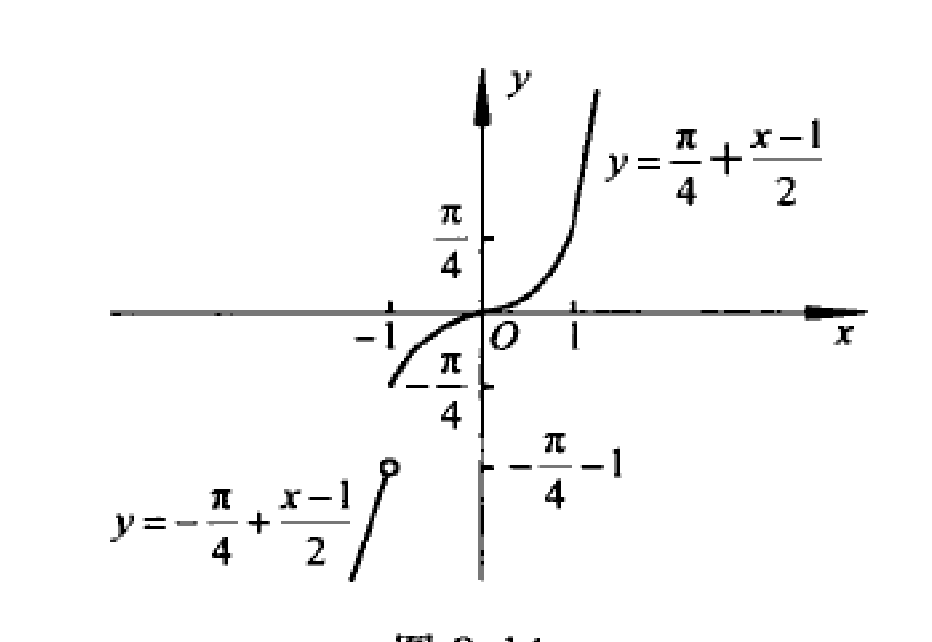


图 2.14

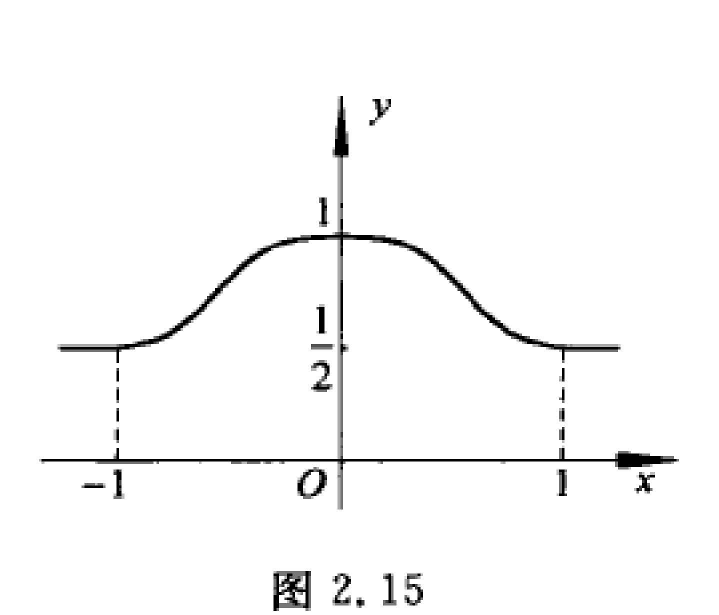


图 2.15

【983】 $y=\begin{cases}x^2\mathrm{e}^{-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1.\end{cases}$ （图 2.16）

解 $y'=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-x^2}(1-x^2), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ （图 2.17）

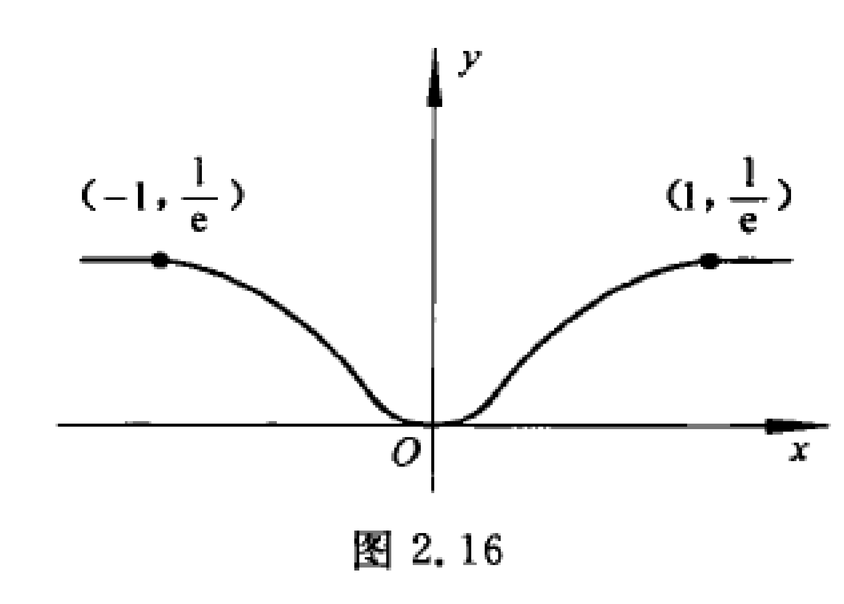


图 2.16

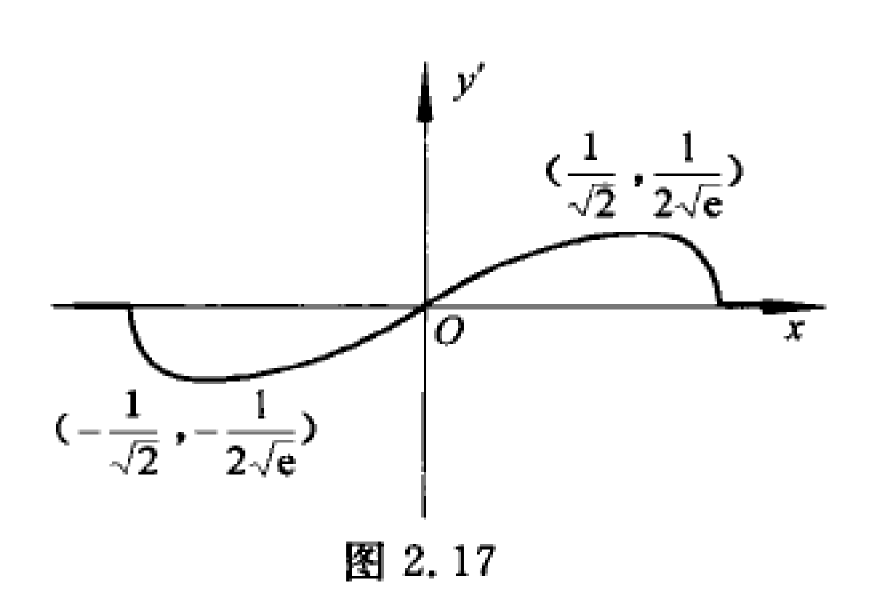


图 2.17

【984】 所给函数的对数的导数称为此函数的**对数导数**：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad (f(x)>0).$$

求下列函数 y 的对数导数：

(1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$；

(3) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$；　　(4) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

解题思路 (1)由 $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得 $\ln y=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|$，利用 977 题(3)的结果，即易获解.

(2)注意 $\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}\ln|3-x|-\frac{2}{3}\ln|3+x|$，仿(1)可得

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}\quad (x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3).$$

(3)注意 $\ln y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|$，仿(1)可得

$$\frac{d}{dx}\ln y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\ (x\in A)，其中\ A=\left\{x\,\Big|\,\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\}.$$

(4)注意 $\ln y=n\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，利用 895 题的结果，即易获解.

解 (1) 由 $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}\quad (0<|x|<1);$$

(2) 由 $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}\ln|3-x|-\frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3(3-x)}-\frac{2}{3(3+x)}=\frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}\quad (x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3);$$

(3)由于 $y=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内，故应设 $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0$，从而有

$$\ln y=\ln\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|,$$

得
$$\frac{d}{dx}\ln y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\quad (x\in A),\quad 其中\ A=\left\{x\,\Big|\,\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\};$$

(4) 由 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y=n\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\qquad \frac{d}{dx}\ln y=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

【985】 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微函数. 求下列函数 y 的导数：

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$；　　(2) $y=\arctan\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$；

(3) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $[\varphi(x)\neq 0,\ \psi(x)>0]$；　　(4) $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ $[\varphi(x)>0,\ \psi(x)>0]$.

提示 (3)注意由 $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ 得 $\ln y=\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x)$，两边同时对 x 求导，即可获解$\left(\frac{d}{dx}\ln y=\frac{y'}{y}\right)$.

(4)由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得 $y=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$.

解 (1) $y'=\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$ $[\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0]$.

(2) $y'=\frac{1}{1+\frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}}\cdot\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $(\psi(x)\neq 0)$.

(3) 由 $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ 得

$$\ln y=\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x),\quad \frac{y'}{y}=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)},$$

于是，$y'=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$.

(4) 由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得

$$y=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},\quad y'=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

【986】 求 y'，设：

(1) $y=f(x^2)$；(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；(3) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$；(4) $y=f\{f[f(x)]\}$.

其中 $f(u)$ 为可微函数.

解 (1) $y'=2xf'(x^2)$；

(2) $y'=2\sin x\cos xf'(\sin^2 x)-2\sin x\cos xf'(\cos^2 x)=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$；

(3) $y'=e^{f(x)}[f'(x)f(e^x)+e^x f'(e^x)]$；

(4) $y'=f'(x)f'[f(x)]f'\{f[f(x)]\}$.

【987】 证明 n 阶行列式微分法：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}. \quad (1)$$

提示 从行列式的定义出发或利用数学归纳法予以证明.

证 证法 1：从行列式的定义出发予以证明.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\frac{d}{dx}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)^{*)}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\frac{d}{dx}[f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)]$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\sum_{i=1}^{n}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots\cdot\frac{d}{dx}f_{ij_i}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots\cdot\frac{d}{dx}f_{ij_i}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

*) 其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

证法 2：利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)]$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{11}(x)f_{22}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{12}(x)f_{21}(x)\right] + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{22}(x)f_{11}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{21}(x)f_{12}(x)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{11}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{21}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{22}(x) \end{vmatrix},$$

故等式(1)对于 $n=2$ 时成立.

今假定等式(1)对于 $n=k$ 时成立,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{ik}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}.$$

要证明等式(1)对于 $n=k+1$ 时也成立.事实上,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k+1\,1}(x) & f_{k+1\,2}(x) & \cdots & f_{k+1\,k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1\,j}(x)\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) & \cdots & f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) & \cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1+j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f_{k+1\,j}(x)\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) & \cdots & f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) & \cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{k+1\,j}(x)\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) & \cdots & f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) & \cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + f_{k+1\,j}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) & \cdots & f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) & \cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}\right]$$

$$
=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k+1\,1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k+1\,k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1} f_{k+1\,j}(x)\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,j-1}(x) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,j+1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) & \cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k+1\,1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k-1\,k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1} f_{k+1\,j}(x)\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,j-1}(x) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,j+1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) & \cdots & f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k+1\,1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k-1\,k+1}(x) \end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k+1\,1}(x) & \cdots & f_{k+1\,k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{k+1}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i1}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{i\,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k+1\,1}(x) & \cdots & f_{k+1\,k+1}(x) \end{vmatrix},
$$

故等式(1)对于 $n=k+1$ 时也成立.

于是,由数学归纳法知,等式(1)对于一切正整数 n 均成立.

【988】 设 $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$,求 $F'(x)$.

提示 利用 987 题的结果.

解 利用 987 题结果,有

$$
F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(x^2+x+9)+(x^2-1+4)+(x^2-x+3)=3(x^2+5).
$$

【989】设 $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$，求 $F'(x)$.

提示 利用 987 题的结果.

解 $F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2$.

【990】 已知函数的图像.近似地作出其导数的图像.

解 先由给定曲线 $y=f(x)$ 上一点 M，作出曲线 $y'=f'(x)$ 上的对应点 M'. 为清楚起见，作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$，取相同的单位，x 轴与 x' 轴平行，y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上(如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y=f(x)$，在曲线上任取一点 $M(x,f(x))$，并作曲线在点 M 处的切线 MN. 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1,0)$，作平行 MN 的直线 PQ，交 y' 轴于点 Q. 于是，

$$O'Q=\tan\alpha=f'(x),$$

即线段 $O'Q$ 是对应于在点 x 的导数 $f'(x)$. 再过点 Q 引平行 x 轴的直线，交过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线于点 M'，则点 M' 就是曲线 $y'=f'(x)$ 上对应于曲线 $y=f(x)$ 上点 M 的点.

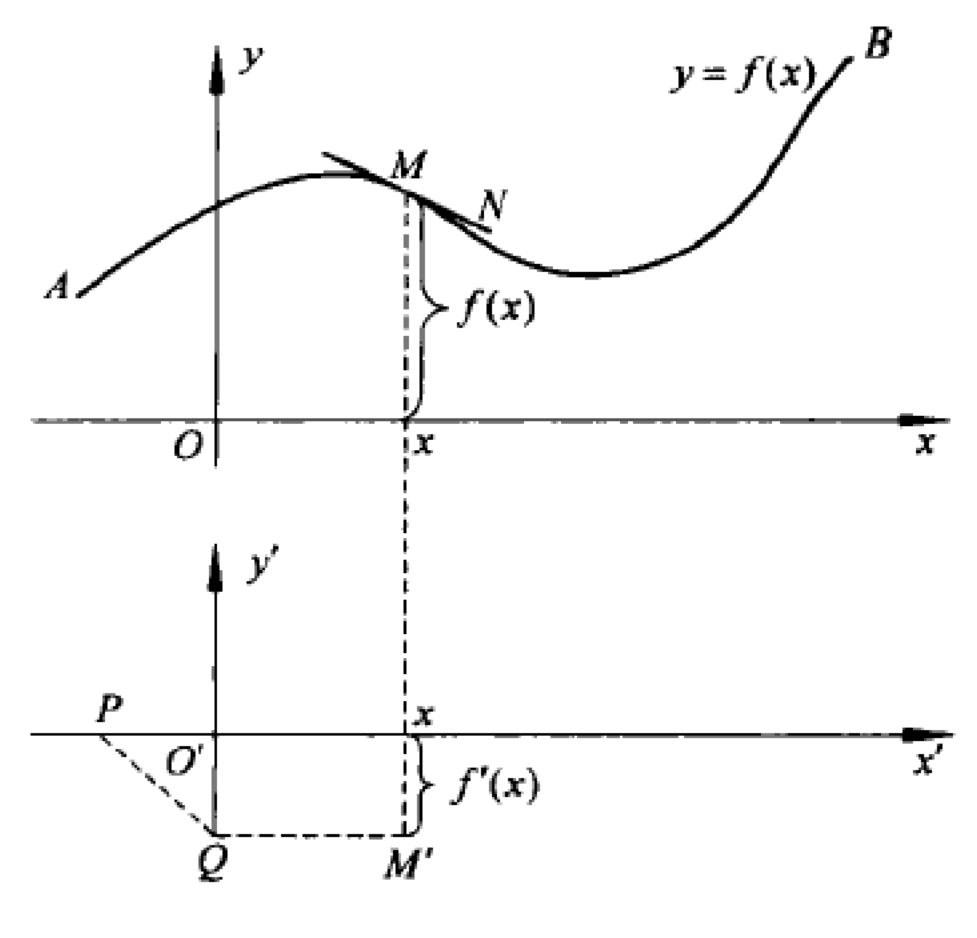


图 2.18

由此，我们就可由已给曲线 $y=f(x)$ 作出曲线 $y'=f'(x)$，按上述方法，在曲线 $y=f(x)$ 上取若干点：

$$M_i(x_i,f(x_i)) \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

且在 Oxy' 系(相当于 $O'x'y'$ 系，这是为了方便起见，分开画)内作出相应点：

$$M_i'(x_i,f'(x_i)) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

最后用光滑曲线连接 $M_1',M_2',\cdots,M_n'$ 各点，此即已给曲线 $y=f(x)$ 对应的导数 $y'=f'(x)$ 的图像，如图 2.19所示.

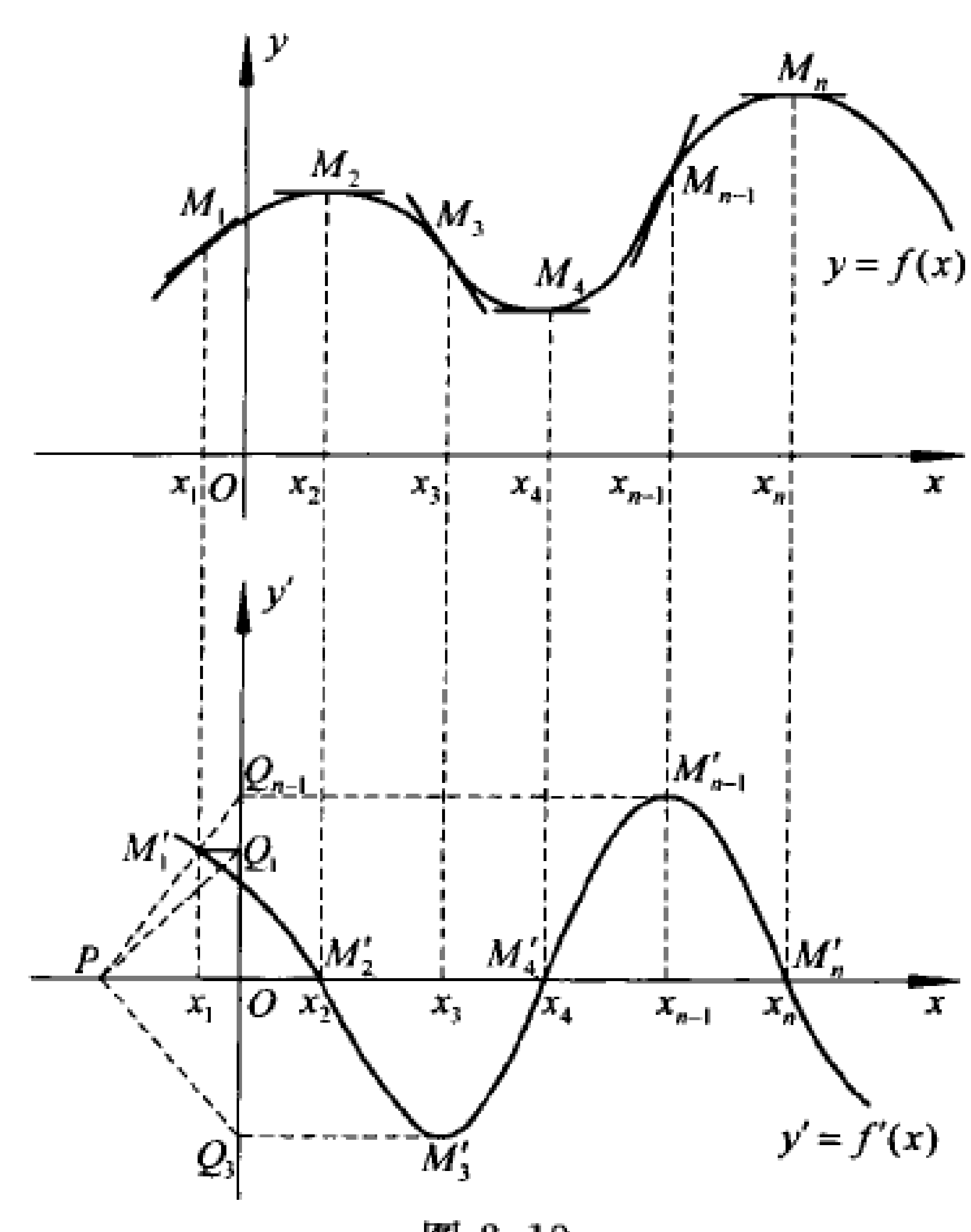


图 2.19

【991】 证明:函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有不连续的导数.

证明思路 当 $x\neq 0$ 时,容易求得 $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$;当 $x=0$ 时,由定义可得 $f'(0)=0$,故导数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义.但是,极限 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在.因此,$x=0$ 为 $f'(x)$ 的不连续点.

证 当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,而

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 中处处存在.但当 $x\to 0$ 时,$f'(x)$ 并不趋向于任何极限,所以,$f'(x)$ 在点 $x=0$ 处是不连续的,这说明了 $f(x)$ 有不连续的导数.

【992】 在什么条件下,函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

(1) 在 $x=0$ 处是连续的; (2) 在 $x=0$ 处可微; (3) 在 $x=0$ 处有连续导数?

提示 (1)$n>0$.注意当 $n=\dfrac{p}{q}$(p,q 互素)且 q 为偶数时,只考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续.

(2)$n>1$. (3)$n>2$.

解 (1)当 $n>0$ 时

$$\lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0,$$

于是,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,此时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的(当 $n=\dfrac{p}{q}$(p,q 互素)且 q 为偶数时,只考虑在 $x=0$ 处右连续).

(2) 当 $n>1$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

于是,$f'(0)=0$,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微.

(3) 当 $n>2$ 时,由于

$$f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$,而由(2)可得 $f'(0)=0$,所以,$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$.这就说明当 $n>2$ 时,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

【993】 在什么条件下,函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^n\sin\dfrac{1}{|x|^m}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(m>0)$$

(1) 于坐标原点的邻域上有有界的导数;

(2) 在此邻域上有无穷导数?

解 (1)当 $x\neq 0$, $x\in(-\delta,\delta)$ $(\delta>0)$时,

$$\begin{aligned}f'(x)&=n|x|^{n-1}\frac{|x|}{x}\sin\frac{1}{|x|^m}-\frac{m}{|x|^{m+1}}\cdot\frac{|x|}{x}\cdot|x|^n\cdot\cos\frac{1}{|x|^m}\\&=\frac{|x|}{x}\left[n|x|^{n-1}\sin\frac{1}{|x|^m}-m|x|^{n-(m+1)}\cos\frac{1}{|x|^m}\right].\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{|x|}{x}$, $\sin\dfrac{1}{|x|^m}$, $\cos\dfrac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数,于是,当 $n\geqslant m+1$ 时,$f'(x)$ 为有界函数(易知此时 $f'(0)=0$).

(2) 在此邻域上，当 $n-(m+1)<0$（即 $n<m+1$）时，$f'(x)$无界. 另一方面，同 992 题(2)一样，当 $n>1$ 时 $f'(0)$才存在，因而，所求的条件为

$$1<n<m+1 \quad (m>0).$$

【994】 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中函数 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处是连续的，求 $f'(a)$.

提示 利用导数的定义及 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)$，

由于 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处连续，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$. 于是，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\varphi(a),$$

即 $f'(a)=\varphi(a)$.

【995】 设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$为连续函数及 $\varphi(a)\neq 0$，证明：此函数在 a 点没有导数. 单侧导数 $f'_-(a)$及 $f'_+(a)$等于什么？

提示 注意 $f'_-(a)=-\varphi(a)$，$f'_+(a)=\varphi(a)$.

解 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(a+\Delta x)=\begin{cases}\varphi(a+\Delta x), & \Delta x>0,\\ -\varphi(a+\Delta x), & \Delta x<0.\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}[-\varphi(a+\Delta x)]=-\varphi(a), \quad \text{即} \quad f'_-(a)=-\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}[\varphi(a+\Delta x)]=\varphi(a), \quad \text{即} \quad f'_+(a)=\varphi(a).$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$，故 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，因此，$f(x)$在 a 点没有导数.

【996】 举出在已知点：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 没有导数的连续函数的例子.

提示 已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 由此，可令 $y=\sum\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

解 我们已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 利用这一点，我们作一个函数

$$y=f(x)=\sum_{k=1}^{n}|x-a_k|,$$

它在 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 点均连续，而在这些点均无导数.

【997】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域上都有不可微点，但在该点是可微的.

作出此函数的略图.

证 对于函数 $f(x)$，我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|}{x}=0,$$

故 $f'(0)=0$，即在 $x=0$ 处函数 $f(x)$是可微的.

下面我们将指出对于 $x=0$ 的任何邻域$(-\delta,\delta)$（其中 $\delta>0$）中，函数 $f(x)$总有不可微点. 事实上，令

$$x_n=\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时，总可使 $0<x_n<\delta$，从而点 $x_n\in(-\delta,\delta)$. 对于这样的点 x_n，有

$$f'_-(x_{2n})=\pi \quad \text{及} \quad f'_+(x_{2n})=-\pi,$$

所以，

$$f'_-(x_{2n})\neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1})\neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是，函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图像全在 Ox 轴上方，包括原点；当 $x=\dfrac{2}{2n+1}$ 时，$f(x)=0$，且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

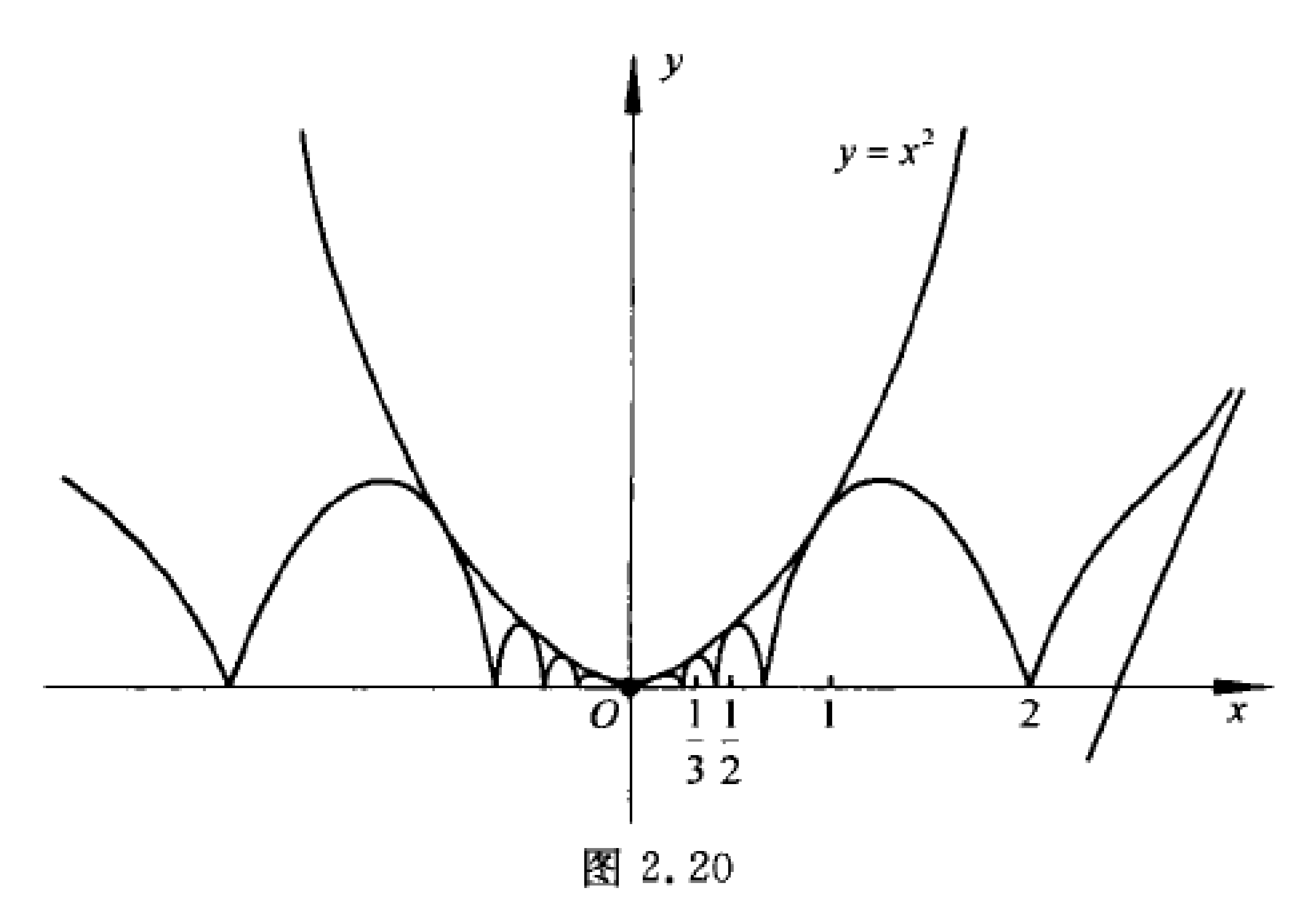


图 2.20

【998】 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

证 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\text{ 为有理数},\\ 0, & \Delta x\text{ 为无理数}.\end{cases}$ 于是，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$，即 $f'(0)=0$.

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

(1) x 为有理数. 取一无理数数列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一有理点($\neq 0$)不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数数列 $\{x'_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x$，则有

$$\lim_{x'_n\to x}\frac{f(x'_n)-f(x)}{x'_n-x}=\lim_{x'_n\to x}\frac{x'^2_n}{x'_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

总上所述，函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

【999】 研究下列函数的可微性：

(1) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$；　　(2) $y=|\cos x|$；

(3) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$；　　(4) $y=\arcsin(\cos x)$；

(5) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x|\leqslant 1,\\ |x|-1, & |x|>1.\end{cases}$

解 (1) 当 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$ 或 $x\neq 3$ 时，函数均可微. 现在我们来考虑在 1，2，3 这三点的可微性.

(ⅰ) 当 $x=1$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}|(\Delta x-1)^2(\Delta x-2)^3|,$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=8$，$\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-8$.

因此，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，由此可知 y 在 $x=1$ 点时不可微；

(ⅱ) 当 $x=2$ 时,由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x\left|(\Delta x+1)(\Delta x-1)^3\right|,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而,y 在 $x=2$ 点可微;

(ⅲ) 当 $x=3$ 时,由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x\left|(\Delta x+2)(\Delta x+1)^2\Delta x\right|,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而,y 在 $x=3$ 点可微;

(2) $y=|\cos x|$ 在 $x=\frac{2k-1}{2}\pi$ (k 为整数)点不可微.

(3) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 只可能在 $x=\pm\pi$ 的点不可微.

现在我们来考察在 $x=-\pi$ 及 $x=\pi$ 时函数 y 的可微性.

(ⅰ) 当 $x=\pi$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\pi^2-(\pi+\Delta x)^2|\sin^2(\pi+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x\sin\Delta x\left|2\pi\Delta x+(\Delta x)^2\right|}{\Delta x},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以,函数 y 在 $x=\pi$ 点可微.

(ⅱ) 同理可证函数 y 在 $x=-\pi$ 点也可微. 于是,函数 $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 处处可微.

(4) $y=\arcsin(\cos x)$在 $|\cos x|=1$ 的点不可微,即在$x=k\pi$ (k 为整数)的点不可微.

(5) 函数 y 对于 $|x|\neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x|=1$ 点的可微性.

(ⅰ) 当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\frac{1}{4}(\Delta x+2)^2, & \Delta x<0,\\ 1, & \Delta x>0.\end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1 \quad 及 \quad \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

所以,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$,即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

(ⅱ) 当 $x=-1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=-1, & \Delta x<0,\\ \frac{\frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}=-\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \Delta x>0.\end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1 \quad 及 \quad \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以,函数 y 在 $x=-1$ 点不可微.

求函数 $f(x)$的左导数 $f'_-(x)$和右导数 $f'_+(x)$. 设:

【1000】 $f(x)=|x|$.

解 当 $x\neq 0$ 时,易见

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{|x|}{x}=\operatorname{sgn}x;$$

当 $x=0$ 时,

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & \Delta x<0,\\ 1, & \Delta x>0.\end{cases}$$

所以,$f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$.

【1001】 $f(x)=[x]\sin\pi x$.

解 当 x 不等于整数时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x;$$

当 x 为整数时，从定义出发得

$$f'_+(k)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{k\cos k\pi\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}=k\pi(-1)^k,$$

同法可得 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$.

【1002】 $f(x)=\begin{cases}x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 当 $x\neq\frac{2}{2k+1}$（k 为整数）时（即使 $\cos\frac{\pi}{x}\neq0$ 的 x 值），

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\sin\frac{\pi}{x}=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x=\frac{2}{2k+1}$ 时，从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi,\quad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi\quad(k\text{ 为整数}).$$

【1003】 $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0,1,2,\cdots)$时，

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}=1;\quad f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\left[-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}}\right]=-1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}$ $(k=1,2,\cdots)$时，我们有

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\left[\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x}+1}\right]=+\infty;$$

同理，可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty\quad(k=1,2,\cdots);\qquad f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty\quad(k=1,2,\cdots).$$

【1004】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 当 $x\neq0$ 时

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

【1005】 $f(x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$.

解 当 $x\neq0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to-0}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}}=-1.$$

同理，可得 $f'_+(0)=1$.

【1006】 $f(x)=|\ln|x||\quad(x\neq0)$.

解 当 $|x|\neq1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{|\ln|x||}{\ln|x|}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}\ \frac{|\ln|x||}{\ln|x|},$$

分两种情况：

(i) 当 $0<|x|<1$ 时，$f'_-(x)=f'_+(x)=-\dfrac{1}{x}$；

(ii) 当 $|x|>1$ 时，$f'_-(x)=f'_+(x)=\dfrac{1}{x}$；

当 $|x|=1$ 时，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\ln|1+\Delta x||}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to-0}|\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}|=-\ln\mathrm{e}=-1,$$

同理，可得 $f'_-(-1)=-1$， $f'_+(\pm1)=1$.

【1007】 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x|\neq1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}=\frac{2}{1+x^2}\operatorname{sgn}(1-x^2);$$

当 $x=1$ 时，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\arcsin\frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2}-\arcsin1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\arcsin\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\left[\frac{\arcsin\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}\cdot\frac{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}\right]=1.$$

同理，可得 $f'_-(-1)=-1$， $f'_+(1)=-1$， $f'_+(-1)=1$.

【1008】 $f(x)=\begin{cases}(x-2)\arctan\dfrac{1}{x-2}, & x\neq2,\\ 0, & x=2.\end{cases}$

解 当 $x\neq2$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\arctan\frac{1}{x-2}+\frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]=\arctan\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1};$$

当 $x=2$ 时

$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\arctan\frac{1}{\Delta x}=-\frac{\pi}{2},$$

同理可求得 $f'_+(2)=\dfrac{\pi}{2}$.

【1009】 证明:函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续,但在此点既无左导数,又无右导数.

证 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以,$f(x)$在点 $x=0$ 连续.

其次,由于

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左侧还是从右侧趋于零,此极限均不存在.因此,在点 $x=0$ 函数 $f(x)$既无左导数,也无右导数.

【1010】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0.\end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续而且可微,应当如何选取系数 a 和 b?

提示 *注意* $f(x_0)=x_0^2=f(x_0-0)$,$f(x_0+0)=ax_0+b$,$f'_-(x_0)=2x_0$,$f'_+(x_0)=a$.

解 $f(x_0)=x_0^2=f(x_0-0)$,$f(x_0+0)=ax_0+b$.当 $x_0^2=ax_0+b$ 时,函数 $f(x)$在点 x_0 连续.又因 $f'_-(x_0)=2x_0$,$f'_+(x_0)=a$,故当 $a=2x_0$ 时,函数在点 x_0 处可微.从而得 $x_0^2=2x_0^2+b$,即 $b=-x_0^2$.

于是,所求的系数为 $a=2x_0$,$b=-x_0^2$.

【1011】 设 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0,\end{cases}$ 其中函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 为左可微的.应当如何选择系数 a 和 b,使函数 $F(x)$在点 x_0 处连续而且可微?

提示 *注意* $F(x_0)=f(x_0)=F(x_0-0)$,$F(x_0+0)=ax_0+b$,$F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$,$F'_+(x_0)=a$,1010 *题即为本题的特例.*

解 $F(x_0)=F(x_0-0)=f(x_0)$,$F(x_0+0)=ax_0+b$.当 $f(x_0)=ax_0+b$ 时,函数 $F(x)$在点 x_0 处连续.又因 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$,$F'_+(x_0)=a$,故当 $a=f'_-(x_0)$时,函数 $F(x)$在点 x_0 处可微.

解方程组 $\begin{cases}a=f'_-(x_0),\\ f(x_0)=ax_0+b,\end{cases}$ 即得所求的系数为 $a=f'_-(x_0)$, $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$.

【1012】 适当地选定参数 A 与 c,用立方抛物线

$$y=A(x-a)(x-b)(x-c)$$

在区域 $a\leqslant x\leqslant b$ 上把两条射线:

$$y=k_1(x-a)\ (-\infty<x<a) \quad 及 \quad y=k_2(x-b)\ (b<x<+\infty)$$

光滑地连接起来.

提示 *注意在接点处两条曲线的切线重合时,它们就光滑地连接起来,由此易得:在点* $x=a$ *处,有* $A(a-b)(a-c)=k_1$;*在点* $x=b$ *处,*$A(b-a)(b-c)=k_2$.

解 对于立方抛物线,

$$y'=A[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时,它们就光滑地连接起来,此时应有相等的斜率.于是,有

(i) 在点 $x=a$ 处,

$$A(a-b)(a-c)=k_1; \tag{1}$$

(ii) 在点 $x=b$ 处,

$$A(b-a)(b-c)=k_2. \tag{2}$$

联立(1)和(2)式,解之得

$$A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2},\quad c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}.$$

【1013】 用抛物线 $y=a+bx^2(|x|\leqslant c)$(其中 a 与 b 为未知的参数)去补充曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}(|x|>c)$ 的部分,以便得到一条光滑曲线.

提示 显见 $c>0$,注意在点 $x=c$ 处,有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c} \quad 及 \quad a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

由对称性可知,在点 $x=-c$ 处,按上述条件求得的系数 a 与 b 也使两曲线光滑连接.

解 显见 $c>0$,否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一条光滑曲线.此时,在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等,且有相同的纵坐标.于是,有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c} \quad 及 \quad a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

从而得 $2bc=-\frac{m^2}{c^2}$,$a+bc^2=\frac{m^2}{c}$.解之,得 $a=\frac{3m^2}{2c}$,$b=-\frac{m^2}{2c^3}$.

由曲线的对称性可知,在点 $x=-c$ 处,按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y=a+bx^2$ 与曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$ 也连成一条光滑曲线.

【1014】 若:(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数,而函数 $g(x)$ 在此点没有导数;(2)函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数,可否断定它们的和 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数?

提示 (1)能.易证.

(2)不能.例如,$f(x)=\frac{x+|x|}{2}$,$g(x)=\frac{x-|x|}{2}$,在点 $x=0$ 处.

解 (1) 能.因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to 0$,上式右端第一项的极限存在,而第二项的极限不存在,因而当 $\Delta x\to 0$,左端的极限也不存在(否则差 $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}-\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在,与 $g(x)$ 不可导相矛盾),这说明 $F(x)$ 在点 x_0 处没有导数.

(2) 不能.例如,

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}, \qquad g(x)=\frac{x-|x|}{2},$$

它们在点 $x=0$ 处都没有导数,但它们的和 $F(x)=f(x)+g(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数且为 1.

【1015】 若:(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数,而函数 $g(x)$ 在此点没有导数;(2)在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数,可否断定他们的积 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数?

提示 (1) 不能.例如,$f(x)=x$,$g(x)=|x|$,在点 $x=0$ 处.

(2) 不能.例如,$f(x)=g(x)=|x|$,在点 $x=0$ 处.

解 (1) 不能.例如,$f(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数,$g(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处没有导数,而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数.事实上,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0\cdot|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(2) 不能.例如,

$$f(x)=|x|, \quad g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 处它们都没有导数,但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数,且 $F'(0)=2x\Big|_{x=0}=0$.

【1016】 若：(1)函数 $f(x)$在点 $x=g(x_0)$有导数，而函数 $g(x)$在点 $x=x_0$ 没有导数；(2)函数 $f(x)$在点 $x=g(x_0)$没有导数，而函数 $g(x)$在点 $x=x_0$ 有导数；(3)函数 $f(x)$在点 $x=g(x_0)$没有导数及函数 $g(x)$在点 $x=x_0$ 没有导数，则函数 $F(x)=f[g(x)]$在已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样？

提示 (1)不定．(2)不定．(3)不定．读者举例．

解 (1) $F'(x_0)$可能存在，也可能不存在．例如，考察函数 $f(x)$、$g(x)$及点 x_0 如下：

(ⅰ) $f(x)=x^2, g(x)=|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$．$f'(0)=0$，$g'(0)$不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=(|x|)^2=x^2$，$F'(0)=0$．这是 $F'(x_0)$存在的一例．

(ⅱ) $f(x)=x$，$g(x)=|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$．$f'(0)=1$，$g'(0)$不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$不存在．这是 $F'(x_0)$不存在的一例．

(2) $F'(x_0)$可能存在，也可能不存在．例如，

(ⅰ) $f(x)=|x|$，$g(x)=x^2$，点 $x=0$，$g(0)=0$．$f'(0)$不存在，$g'(0)$存在，且等于零；而 $F(x)=f[g(x)]=|x^2|=x^2$，$F'(0)$存在，且等于零．

(ⅱ) $f(x)=|x|$，$g(x)=x$，点 $x=0$，$g(0)=0$．而$F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$不存在．

(3) $F'(x_0)$可能存在，也可能不存在．例如，

(ⅰ) $f(x)=2x+|x|$，$g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$．则 $f'(0)$及 $g'(0)$均不存在；易知

$$F(x)=f[g(x)]=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right)+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\equiv x.$$ 因此 $F'(0)$存在且等于 1．

(ⅱ) $f(x)=|x|$，$g(x)=|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$．$f'(0)$及 $g'(0)$均不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$也不存在．

【1017】 函数 $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$的图像在哪些点处有竖直切线？作出此图像．

解 $y'=1+\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ $(x\neq k\pi; k=0,\pm1,\cdots)$.

当 $x=k\pi$ 时，容易直接算出

$$y'\Big|_{x=k\pi}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{k\pi+\Delta x+\sqrt[3]{\sin(k\pi+\Delta x)}-k\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left(1+\sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\right)=\infty,$$

故当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时有竖直切线．

当 $x=k\pi$ 时，$y=k\pi$；

当 $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ 时，$y=x\pm1$，

其图像如图 2.21 所示．

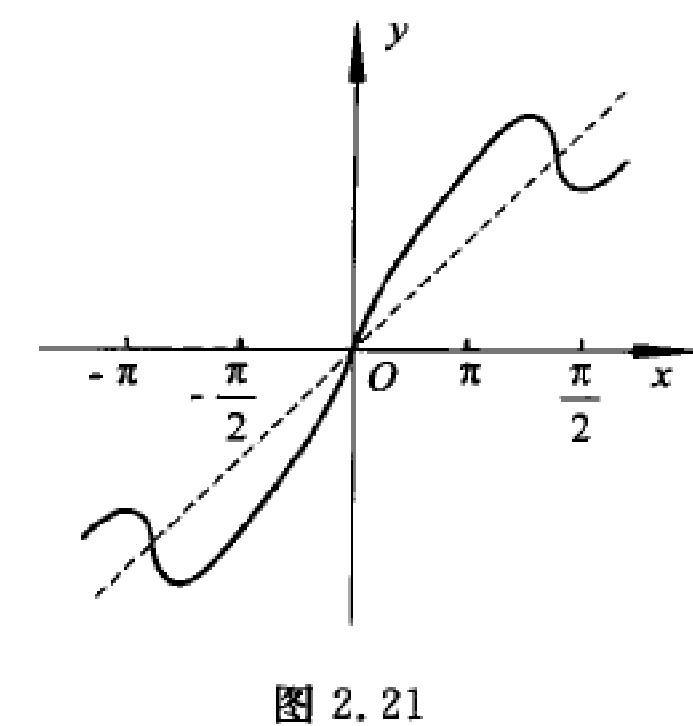


图 2.21

【1018】 函数 $f(x)$在其不连续点可否有：(1)有限的导数；(2)无穷的导数？

提示 (1)不能． (2)能．例如，$f(x)=\operatorname{sgn}x$，在点 $x=0$ 处．

解 (1)不能．否则由此可推出其连续性．

(2)能．例如，$y=f(x)=\operatorname{sgn}x$ 它在点 $x=0$ 不连续，但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{|\Delta x|}\to+\infty \quad (\Delta x\to0).$$

【1019】 若函数 $f(x)$在有限的区间(a,b)上可微，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，则是否必有

(1) $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$； (2) $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}|f'(x)|=+\infty$?

解 (1) 一般地说，不能保证 $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$．例如，对于$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内定义的函数

$$f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},$$

显然有 $\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$. 但是，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，对于特殊的一串数 $x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(k=1,2,\cdots)$ 有 $f'(x_k)=0$，所以，$\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0$，因而，$\lim_{x\to+0} f'(x)=\infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim_{x\to a+0}}\, |f'(x)|=\infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$，故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的右近旁保持定号，从而必有 $\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty$ 或 $\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$，显然可设前者成立（否则，考察函数 $-f(x)$ 即化为前者）. 再通过对自变量作代换 $t=a+b-x$ 可知，我们只需证明下面的命题：

若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (A,B) 上可微，且

$$\lim_{x\to B-0} f(x)=+\infty, \tag{1}$$

则必有

$$\overline{\lim_{x\to B-0}}\, |f'(x)|=+\infty. \tag{2}$$

现在给出上述命题的证明如下：

由(1)，对于任给 $M_0>0$，存在 $\delta_0>0$，使当 $x\in[B-\delta_0,B)$ 时，有

$$f(x)\geqslant M_0 \quad (B_0\leqslant x<B, \text{其中 } B_0=B-\delta_0).$$

记 $P=(B_0,f(B_0))$，有 $f(B_0)\geqslant M_0$. 为证(2)，我们采用反证法. 设存在 $K>0$，使

$$|f'(x)|\leqslant K \quad (x\in[B_0,B)),$$

则将引出矛盾. 论证如下：

今过 P_0 作斜率为 $2K$ 的直线

$$l: Y-f(B_0)=2K(x-B_0). \tag{3}$$

它与 $x=B$ 垂线相交于一点 Q，其纵坐标为

$$y_Q=f(B_0)+2K(B-B_0)=f(B_0)+2K\delta_0,$$

记 $M_1=f(B_0)+2K\delta_0$，则 $y_Q=M_1$，它是直线 l 在 $[B_0,B]$ 上的最大值.

对 M_1 而言，由(1)可知，存在 $x_2\in(B_0,B)$ 使 $f(x_2)>M_1$，即点 $P_2=(x_2,f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面，由在 $x=B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性，在 $x=B_0$ 右侧邻域内，对于任给 $\varepsilon_1>0$（取 $\varepsilon_1<\frac{K}{2}$），存在 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|f'(B_0)-\frac{f(x)-f(B_0)}{x-B_0}\right|<\varepsilon_1<\frac{K}{2}.$$

于是，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(B_0)}{x-B_0}\right|\leqslant|f'(B_0)|+\left|\frac{f(x)-f(B_0)}{x-x_0}-f'(B)\right|<K+\varepsilon_1<K+\frac{K}{2}=\frac{3}{2}K.$$

即有在 r 曲线 $y=f(x)$ 上：当 $0<|x-B_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(B_0)|<\frac{3}{2}K|x-B_0|, \tag{4}$$

今取 $x_1>B_0$. 使 $x_1<x_2$，$x_1<B_0+\delta$. 于是，由(3)式和(4)式知

$$f(x_1)-f(B_0)<\frac{3}{2}K(x_1-B_0)<2K(x_1-B_0)=Y(x_1)-f(B_0),$$

故 $f(x_1)<Y(x_1)$，即点 $(x_1,f(x_1))$ 位于直线 l 之下方. 考虑连续函数

$$G(x)=f(x)-Y(x),$$

我们取

$$c=\inf_{x\in[x_1,x_2]}\{x\,|\,G(x)>0\},$$

则由 $G(x_1)<0$，$G(x_2)>0$，易见 c 是存在的，而且 $G(c)=0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2\geqslant x>c$，则有 $G(x)>0$，即在 c 点附近且 $x>c$ 时，有 $f(x)>Y(x)$. 从而，

$$f(x)-f(c)>Y(x)-f(c)=Y(x)-Y(c).$$

注意 $x-c>0$，故又有（当 $x>c$，且在 c 附近时）：

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>\frac{Y(x)-Y(c)}{x-c},$$

上式两边取极限（让 $x\to c+0$），并注意到函数的可微性，有 $f'(c+0)=f'(c)$，于是有

$$f'(c)\geqslant Y'(c)=2K.$$

此处 $c\in(x_1,x_2)\subset[B_0,B)$，这个不等式与 $|f'(x)|\leqslant K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x\in[B_0,B)$ 时是无界的. 这就完成了(2)的证明，从而，命题获证.

注 若利用以后的拉格朗日定理，则可很简单地证明此结论.

【1020】 设函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 上可微，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$，是否必有 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$?

提示 不一定. 例如，$f(x)=\sqrt[3]{x}$，在 $(0,b)(b>0)$ 上.

解 不一定. 例如，

$$f(x)=\sqrt[3]{x},$$

它在 $(0,b)(b>0)$ 上可微，且 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to+0}f'(x)=+\infty$，然而 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}=0$.

【1021】 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在?

提示 不能. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$，在 $(0,+\infty)$ 上.

解 不能. 例如. 函数

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在 $(0,+\infty)$ 上可微，$f'(x)=2\cos(x^2)-\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在.

【1022】 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 由此可否推出有限的或无穷的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在?

提示 不能. 例如，函数 $f(x)=\cos(\ln x)$，在 $(0,+\infty)$ 上.

解 不能. 例如，

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它在 $(0,+\infty)$ 上有界且可微，其导数为 $f'(x)=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$，同时有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

【1023】 对不等式可否逐项微分?

提示 不可以. 例如，在 $(-\infty,0)$ 上有 $2x\leqslant x^2+1$.

解 一般地说不行. 例如，在 $(-\infty,0)$ 上有

$$2x\leqslant x^2+1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分，因为在 $(-\infty,0)$ 上不等式 $2\leqslant 2x$ 不成立.

【1024】 导出求和公式：

$$P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1},$$
$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}.$$

解题思路 令 $\bar{P}_n=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$，$\bar{Q}_n=1\cdot x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$，则有 $(\bar{P}_n)'=P_n$，$(\bar{Q}_n)'=Q_n$ 及 $\bar{Q}_n=xP_n$. 当 $x\neq1$ 时易得 $\bar{P}_n$，从而可得 P_n 及 Q_n. 至于当 $x=1$ 时已有熟知的求和公式.

解 设

$$\bar{P}_n=x+x^2+x^3+\cdots+x^n, \tag{1}$$
$$\bar{Q}_n=1\cdot x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n. \tag{2}$$

则 $(\bar{P}_n)'=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=P_n$，$(\bar{Q}_n)'=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}=Q_n$.

另一方面，由(1)式得

$$\bar{P}_n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}\quad(x\neq 1).$$

由于$(\bar{P}_n)'=P_n$，即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right]'=P_n,$$

于是，得

$$P_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\bar{Q}_n=x(1+2x+\cdots+nx^{n-1})=xP_n.$$

由于$(\bar{Q}_n)'=Q_n$，所以，$(xP_n)'=Q_n$，即

$$P_n+xP_n'=Q_n. \tag{3}$$

而

$$P_n'=\left[\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\right]'$$
$$=\frac{[-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n](1-x)^2+2(1-x)[1-(n+1)x^n+nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将 P_n 及 P_n' 代入(3)式，即得

$$Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

当 $x=1$ 时已有熟知的求和公式.

【1025】 导出求和公式：

$$S_n=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx,$$
$$T_n=\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx.$$

解题思路 利用三角积化和差公式，易得

$2\sin\frac{x}{2}\cdot S_n=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x=2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x$，再注意到 $T_n=(S_n)'$即获解.

解 $$S_n=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+\cdots+2\sin\frac{x}{2}\sin nx\right]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

即 $S_n=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

又因

$$T_n=(S_n)'=\frac{\left[n\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x+(n+1)\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right]\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{n\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}+\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

所以，$T_n=\dfrac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$.

【1026】 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

推出求和公式：

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

解题思路 对等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \tag{1}$$

两端分别求导，得

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}-\cdots-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{\cos x\sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}}. \tag{2}$$

(2)÷(1)，即可获解.

解 对等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \tag{1}$$

两端分别求导数，即得

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}-\cdots-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{\cos x\sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}}. \tag{2}$$

(2)÷(1)得

$$-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n},$$

所以，

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

【1027】 证明：可微偶函数的导数为奇函数，而可微奇函数的导数为偶函数．给出这个事实的几何解释.

提示 利用奇、偶函数定义，两端求导即易获证.

证 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$．两端微分之，得

$$f'(x)=-f'(-x),\quad 即\quad f'(-x)=-f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数．同理可证：可微奇函数的导数为偶函数.

这个事实说明：凡对称于 Oy 轴的图像，其对称点的切线也关于 Oy 轴对称；凡关于原点对称的图像，其

对称点的切线互相平行.

【1028】 证明:可微周期函数的导数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数,周期为 T,则

$$f(x+T)=f(x).$$

两端微分之,得

$$f'(x+T)=f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数.

【1029】 若圆半径以 2cm/s 的速度匀速增加,则当圆半径 $R=10$cm时,圆面积增加的速度如何?

解 设圆面积为 S,则 $S=\pi R^2$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{R=10}=2\pi R\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right|_{R=10}=40\pi\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}),$$

故当 R 为 10cm 时,圆面积的增加速度为 $40\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$.

【1030】 矩形的一边 $x=20$m,另一边 $y=15$m. 若第一边以 1m/s 的速度减少,而第二边以 2m/s 的速度增加,问这矩形的面积和对角线变化的速度如何?

解 面积 $S=xy$, 对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x>0,y>0)$, 对 t 求导数,即得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\quad 及\quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设,有 $x=20,y=15,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2$,代入上面两式,得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=20\cdot 2+(-1)\cdot 15=25,\quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{-20+2\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}=0.4.$$

于是,该矩形的面积的变化率为 $25\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$,而对角线的变化率为 0.4m/s.

【1031】 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发. A 船往北,B 船往东. 若 A 船的速度为 30km/h, B 船的速度为 40km/h,问二船间的距离增加的速度如何?

解 记时间为 t(h),A 与 B 离码头的距离分别为 $30t$ 与 $40t$(km),注意成直角情形,故两船间的距离为

$$d(t)=\sqrt{(30t)^2+(40t)^2}=50t,$$

故两船间的距离增加的速度为

$$d'(t)=50\mathrm{km/h}.$$

【1032】 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-2, & 2<x<+\infty,\end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$,轴 Ox 及通过点 $x\,(x\geqslant 0)$ 且垂直于 Ox 的直线三者围成的面积. 写出函数$S(x)$的解析表达式,求出导数 $S'(x)$,并作出函数 $y=S'(x)$的图像.

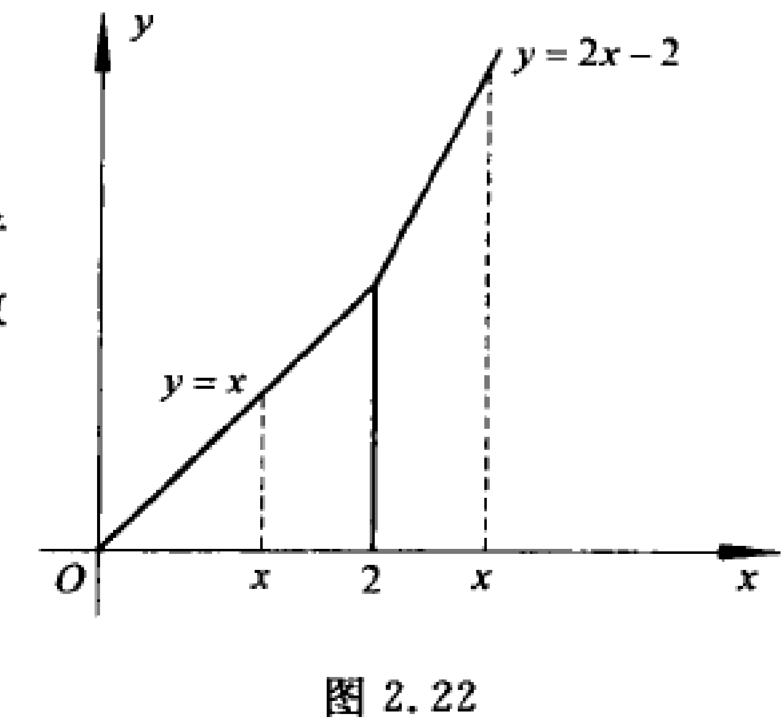


图 2.22

解 当 $x\in[0,2]$时,$S(x)=\dfrac{1}{2}x^2$;

当 $x\in(2,+\infty)$时,

$$S(x)=\frac{1}{2}2^2+\frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)]=x^2-2x+2.$$

从而有 $S'(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-2, & 2<x<+\infty.\end{cases}$ (图 2.22)

【1033】 函数 $S(x)$是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$、轴 Ox 及通过点 O 和 $x\,(|x|\leqslant a)$ 且垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积. 写出函数 $S(x)$的解析表达式,求出导数 $S'(x)$,并作出其导数 $y=S'(x)$的图像.

解 $S(x)$是由一个直角三角形和一个中心角为α的扇形组成，其中$\sin\alpha=\frac{|x|}{a}$，故当$0<|x|\leqslant a$时，

$$S(x)=\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}.$$

于是，

$$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{|x|}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{sgn}x\quad(0<|x|\leqslant a).$$

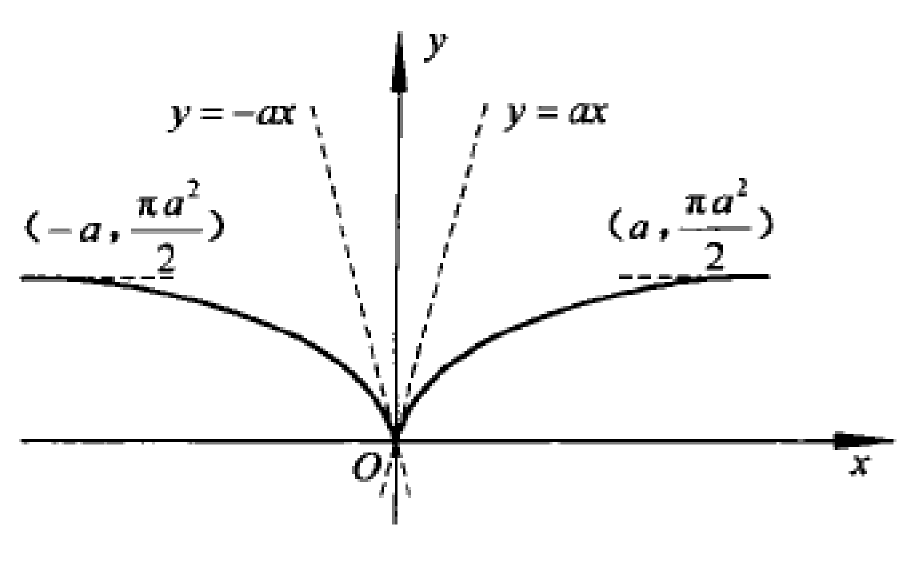


图 2.23

函数$y=S(x)$的图像如图 2.23 所示. 函数$y=S'(x)$的图像就是以原点为中心，a为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段，但不包括$(0,a)$点及$(0,-a)$点，图像省略.

§2. 反函数的导数. 用参数形式给出的函数的导数. 隐函数的导数

1° **反函数的导数** 导数$f'(x)\neq0$的可微函数$y=f(x)(a<x<b)$具有单值连续的反函数$x=f^{-1}(y)$，此反函数也可微，并且成立公式

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

2° **用参数形式给出的函数的导数** 若方程组

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\qquad(\alpha<t<\beta),$$

其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$为可微函数，且$\varphi'(t)\neq0$，在某区域内确定y为x的单值连续函数：

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导数可用公式

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3° **隐函数的导数** 若可微函数$y=y(x)$满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则此隐函数之导数$y'=y'(x)$可从以下方程求得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x,y)]=0,$$

其中$F(x,y)$是变量x的复合函数.

【1034】 证明：由方程$y^3+3y=x$确定的单值函数$y=y(x)$存在，并求它的导数y'_x.

证 对函数$x=f(y)=y^3+3y$有

$$f'(y)=3y^2+3=3(y^2+1)>0$$

其中y为任意实数，故$f(y)$是严格增大的(在$-\infty<y<+\infty$)，因此存在单值的反函数$y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$，且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

【1035】 证明:由方程 $y-\varepsilon\sin y=x(0\leqslant\varepsilon<1)$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在,并求其导数 y'_x.

提示 仿1034题的证明,并利用反函数的求导公式.

证 对于函数 $x=f(y)=y-\varepsilon\sin y$ 有

$$f'(y)=1-\varepsilon\cos y>0\quad(0\leqslant\varepsilon<1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增大的,从而反函数 $y=y(x)$ 存在且是单值的,且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

【1036】 设:(1) $y=x+\ln x\ (x>0)$; (2) $y=x+e^x$; (3) $y=\operatorname{sh}x$; (4) $y=\operatorname{th}x$.
求它们的反函数 $x=x(y)$ 的存在域,并求它们的导数.

解 (1) 由 $y'_x=1+\dfrac{1}{x}>0\ (x>0)$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$,其存在域为 $-\infty<y<+\infty$,而导数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}.$$

(2) 由 $y'_x=1+e^x>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$,其存在域为 $-\infty<y<+\infty$,而导数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1-x+y}.$$

(3) 由 $y'_x=\operatorname{ch}x>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$,其存在域为 $-\infty<y<+\infty$,而导数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

其中因为 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$,所以,$e^x+e^{-x}=2\sqrt{1+y^2}$.

(4) 由 $y'_x=\dfrac{1}{(\operatorname{ch}x)^2}>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$,其存在域为 $-1<y<1$. 由于

$$y^2=\operatorname{th}^2x=\frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{\operatorname{ch}^2x-1}{\operatorname{ch}^2x},$$

而 $\operatorname{ch}^2x=\dfrac{1}{y'_x}=x'_y$,于是,反函数的导数 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{1-y^2}$.

【1037】 设:(1) $y=2x^2-x^4$; (2) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; (3) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各支,求它们的导数并作其图像.

解 (1) $x^4-2x^2+y=0$. $x^2=1\pm\sqrt{1-y}$. 单值连续的各枝为

$$x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant1),$$

$$x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant1),$$

$$x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant1),$$

$$x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant1).$$

由 $y=2x^2-x^4$,微分得 $1=4x\dfrac{dx}{dy}-4x^3\dfrac{dx}{dy}$,

所以,$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{4x-4x^3}$. 从而有

$$\frac{dx_i}{dy}=\frac{1}{4x(1-x^2)}\quad(i=1,2,3,4).\quad(图 2.24)$$

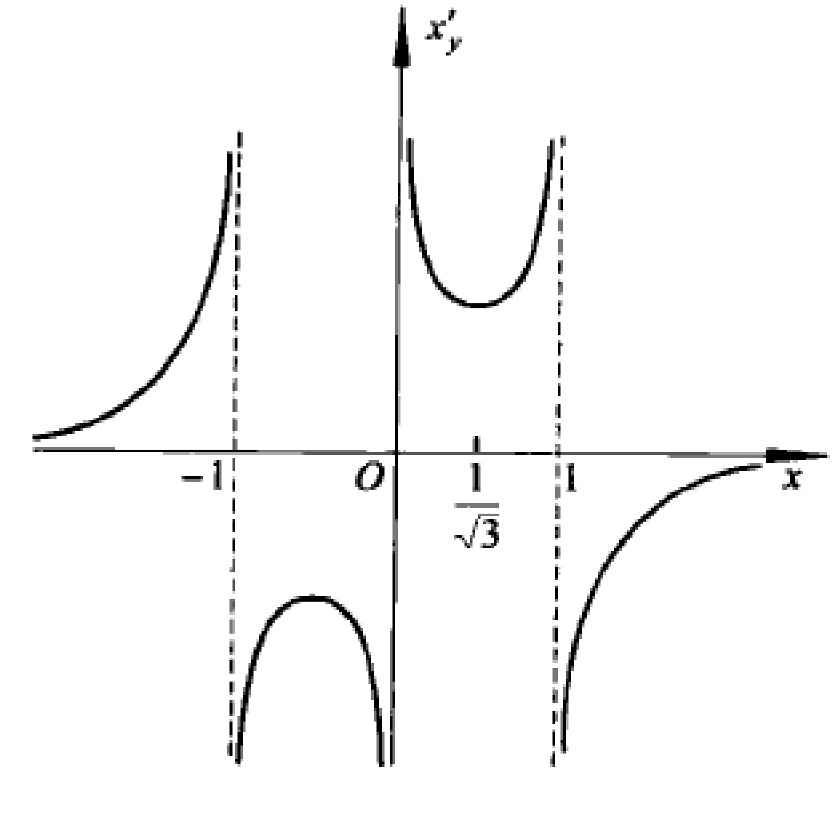
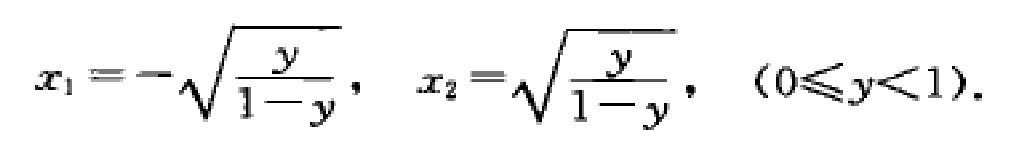


图 2.24

(2) $\dfrac{x^2}{1+x^2}=y$,即 $x^2=\dfrac{y}{1-y}$. 单值连续各支为



$$x_1=-\sqrt{\frac{y}{1-y}},\quad x_2=\sqrt{\frac{y}{1-y}},\quad(0\leqslant y<1).$$

由 $y'_x=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ 及 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}$，有$\frac{dx_i}{dy}=\frac{(1+x^2)^2}{2x}=\frac{x^3}{2y^2}$. 当 $x_i\to 0$ 时，

$$\frac{dx_i}{dy}\to(\operatorname{sgn}x_i)\cdot(+\infty)\quad(i=1,2)\quad(图\ 2.25)$$

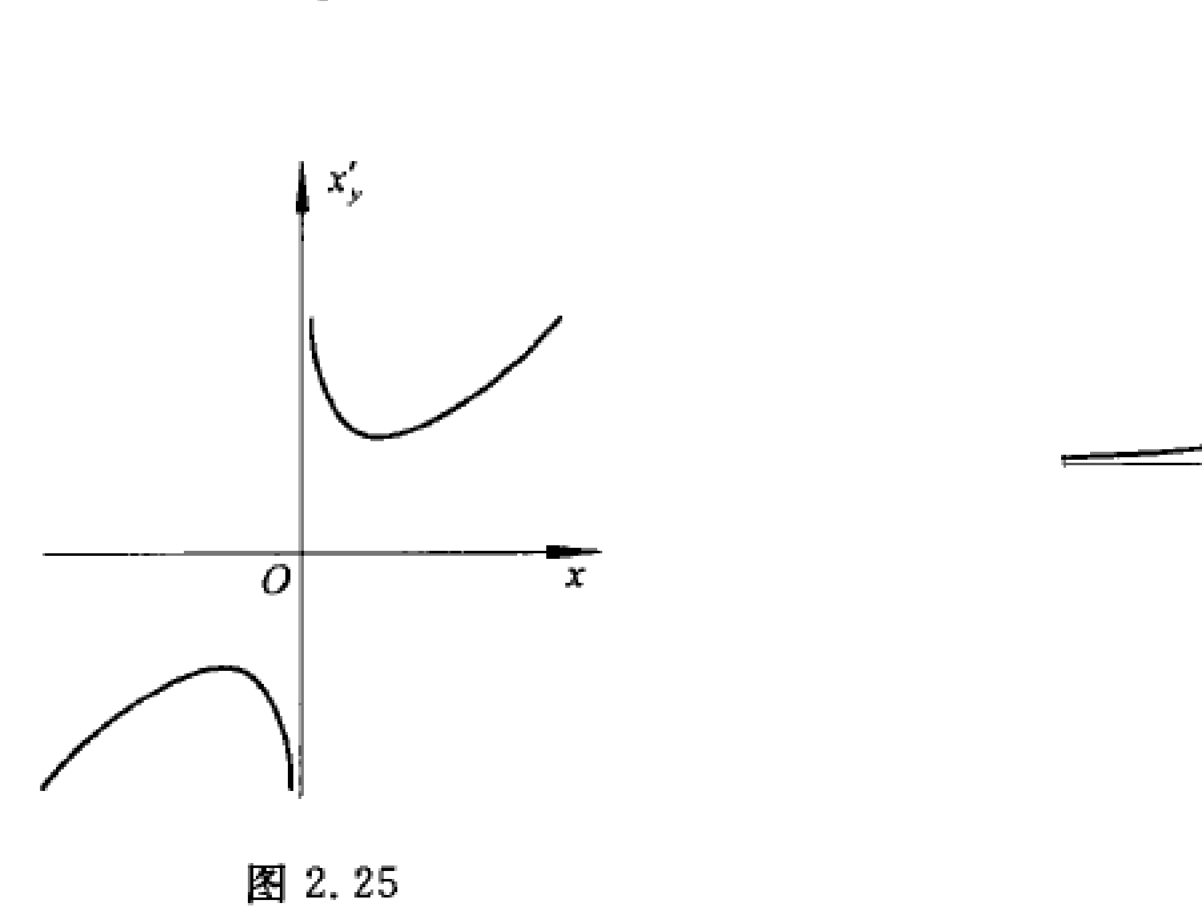


图 2.25　　　　图 2.26

(3) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$，解出 e^{-x}，得 $e^{-x}=1\pm\sqrt{1-y}$. 单值连续各支为

$$x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y})\ (-\infty<y\leqslant 1),\quad x_2=-\ln(1-\sqrt{1-y})=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}\ (0<y\leqslant 1).$$

由 $y=2e^{-x}-e^{-2x}$，对 y 求导数，得 $1=-2e^{-x}\frac{dx}{dy}+2e^{-2x}\frac{dx}{dy}$，所以，$\frac{dx_i}{dy}=-\frac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}\quad(i=1,2)$.（图 2.26）

【1038】 作出函数 $y=y(x)$的略图，并求其导数 y'_x. 设：$x=-1+2t-t^2$，$y=2-3t+t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$时，$y'_x(x)$等于什么？在何点 $M(x,y)$的导数 $y'_x(x)=0$？

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3+3t^2}{2-2t}=-\frac{3}{2}(1+t).$$

当 $t=-1$，即 $x=-4$，$y=4$ 时. $y'_x(x)=0$.

当 $x=0$ 时，$t=1$，此时 $y'_x(x)=-3$；当 $x=-1$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y'_x(x)=-\frac{3}{2}$或 $y'_x(x)=-\frac{9}{2}$.

列表：

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t<-1$ 时，$\frac{dy}{dx}>0$，函数值 y 随自变量增加而增加，曲线上升.

当 $t>-1$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$，曲线下降.

图像如图 2.27 所示.

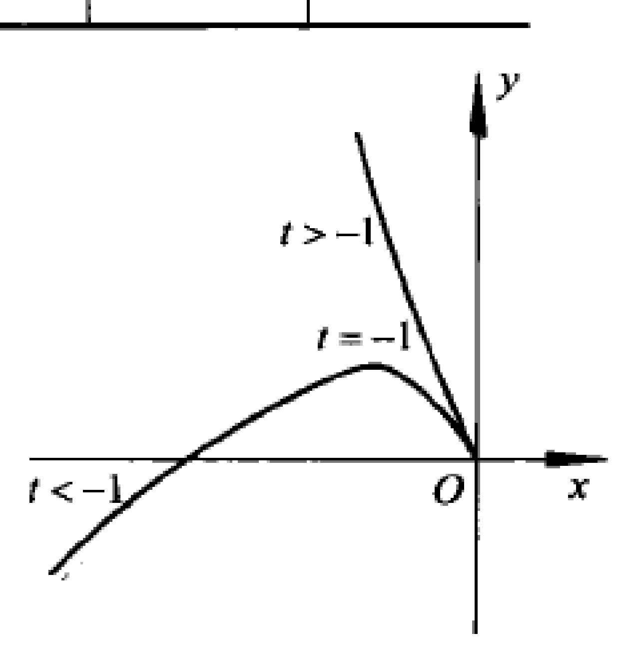


图 2.27

求导数 y'_x(参数是正数). 设：

【1039】$^+$　$x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$，　$y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

解 $$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}},\quad \frac{dx}{dt}=-\frac{1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}},$$

于是，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$ $(t>0,\ t\neq1)$.

【1040】 $x=\sin^2 t,\quad y=\cos^2 t$.

解 $\frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t,\quad \frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t$，于是，$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\cos t\sin t}{2\cos t\sin t}=-1\quad(0<x<1)$.

【1041】 $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t\quad(0<|t|<\pi)$.

【1042】 $x=a\,\mathrm{ch}t,\quad y=b\,\mathrm{sh}t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\,\mathrm{ch}t}{a\,\mathrm{sh}t}=\frac{b}{a}\coth t\quad(t\neq0)$.

【1043】 $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t\quad\left(t\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\ k\text{ 为整数}\right)$.

【1044】 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}\quad(t\neq2k\pi,\ k\text{ 为整数})$.

【1045】 $x=e^{2t}\cos^2 t,\quad y=e^{2t}\sin^2 t$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{2t}(\sin^2 t+\sin t\cos t)}{2e^{2t}(\cos^2 t-\sin t\cos t)}=\frac{\sin t\cdot\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t\cdot\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}=\tan t\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\text{ 为整数};\ t\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n=0,1,2,\cdots\right).$$

【1046】 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

解 $$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\left[-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{\mathrm{sgn}\,t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

于是，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\mathrm{sgn}\,t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\mathrm{sgn}\,t\quad(0<|t|<+\infty)$.

【1047】 证明：由方程组 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微．但它的导数不能用普通的公式求得．

提示 易知 $\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{t=0}=\begin{cases}3\Delta t, & \Delta t>0,\\ \Delta t, & \Delta t<0.\end{cases}$ 再注意到 $|t|$ 在 $t=0$ 处不可微，即知 $\frac{dy}{dx}$ 在 $t=0$ 处不能用普通的公式求得．

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x=2\Delta t+|\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y=5(\Delta t)^2+4\Delta t\cdot|\Delta t|$．于是，

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{t=0}=\frac{5(\Delta t)^2+4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t+|\Delta t|}=\begin{cases}3\Delta t, & \Delta t>0,\\ \Delta t, & \Delta t<0,\end{cases}$$

从而，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to0\quad(\Delta t\to0).$$

即 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微. 但由于 $|t|$ 当 $t=0$ 时不可微，因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t=0$ 时不存在. 所以，导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t=0$ 的值不能用普通公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x：

【1048】 $x^2+2xy-y^2=2x$. 当 $x=2$ 与 $y=4$ 及当 $x=2$ 与 $y=0$ 时，y' 等于什么？

提示 两端对 x 求导，并注意 $(xy)'_x=y+xy'_x$ 及 $(y^2)'_x=2yy'_x$，即易获解.

1049 题～1053 题均可仿照本题的解法.

解 两端对 x 求导，得

$$2x+2xy'_x+2y-2yy'_x=2.$$

于是，

$$y'_x=\frac{1-x-y}{x-y}\quad(x\neq y).\quad y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=4}}=\frac{5}{2},\quad y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=0}}=-\frac{1}{2}.$$

【1049】 $y^2=2px$ （抛物线）.

解 两端对 x 求导，得 $2yy'_x=2p$. 于是，$y'_x=\frac{p}{y}$ （$y\neq 0$）.

【1050】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （椭圆）.

解 两端对 x 求导，得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'_x}{b^2}=0$. 于是，$y'_x=-\frac{b^2x}{a^2y}$ （$y\neq 0$）.

【1051】 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ （抛物线）.

解 两端对 x 求导，得 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x=0$. 于是，$y'_x=-\sqrt{\frac{y}{x}}$ （$x>0$，$y>0$）.

【1052】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ （星形线）.

解 两端对 x 求导，得 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x=0$. 于是，$y'_x=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ （$x\neq 0$）.

【1053】 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ （对数螺线）.

解 两端对 x 求导，得 $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'_x-y}{x^2}=\frac{x+yy'_x}{x^2+y^2}$. 于是，$y'_x=\frac{x+y}{x-y}$ （$x\neq y$，$x\neq 0$）.

【1054】 求 y'_x，设：

(1) $r=a\varphi$（阿基米得螺线）； (2) $r=a(1+\cos\varphi)$（心脏线）； (3) $r=ae^{m\varphi}$（对数螺线），

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 是极坐标.

提示 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，其中 $r=r(\varphi)$. 利用参数方程所确定的函数的求导方式，可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{r\cos\varphi+\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}}{-r\sin\varphi+\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}}.$$

解 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，其中 $r=r(\varphi)$. 于是，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi}.\tag{1}$$

(1) $\frac{dr}{d\varphi}=a$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi}=\tan(\varphi+\arctan\varphi).$$

(2) $\dfrac{dr}{d\varphi}=-a\sin\varphi$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin^2\varphi+a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}=-\frac{\cos2\varphi+\cos\varphi}{\sin2\varphi+\sin\varphi}=-\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=-\cot\frac{3\varphi}{2}\ (\varphi\neq0,\varphi\neq\pm\frac{2\pi}{3}).$$

(3) $\dfrac{dr}{d\varphi}=mae^{m\varphi}$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi+ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi-ae^{m\varphi}\sin\varphi}=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}=\tan(\varphi+\arctan\frac{1}{m}).$$

§3. 导数的几何意义

1° **切线和法线的方程** 可微函数 $y=f(x)$ 在其图像上之一点 $M(x,y)$（图 2.28）处的**切线** MT 和**法线** MN 的方程分别具有以下形式：

$$Y-y=y'(X-x)\quad 及\quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线上的点的坐标，而 $y'=f'(x)$ 为切点处导数的值.

2° **切线长和法线长** 对于与切线和法线有关的一些线段：PT 为次切线，PN 为次法线，MT 为切线，MN 为法线. 考虑到 $\tan\alpha=y'$（图 2.28）. 我们得到下列值：

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|,\quad PN=|yy'|,\quad MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},\quad MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

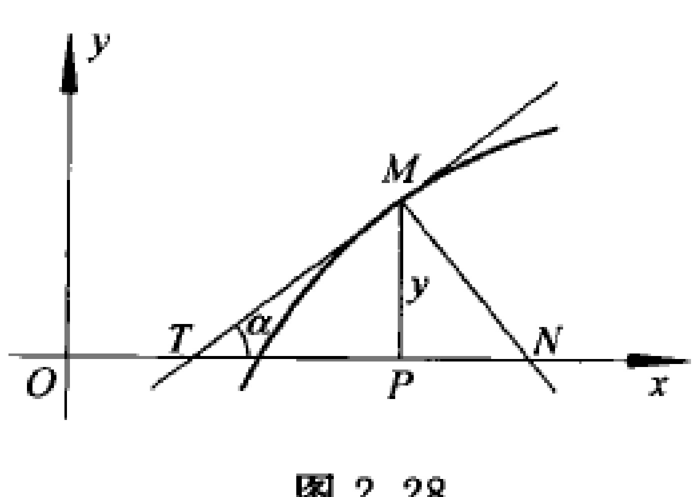


图 2.28

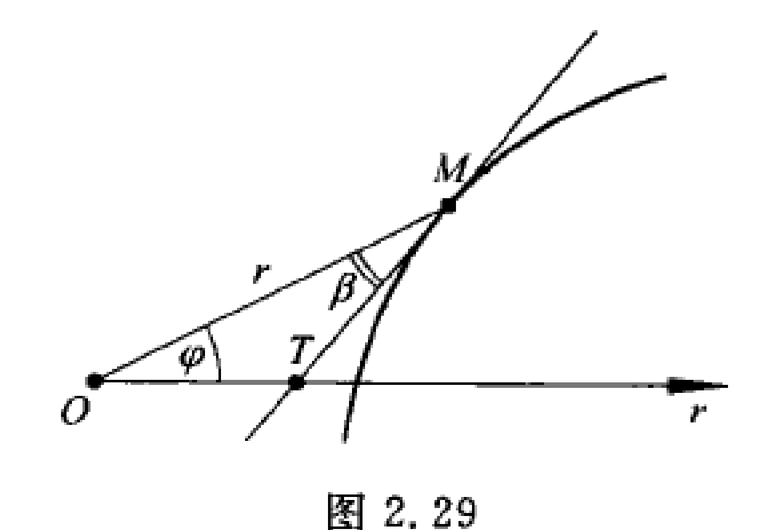


图 2.29

3° **切线与切点的径向量间的夹角** 若 $r=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程，β 为切线 MT 与切点 M 的径向量 OM 所成的角（图 2.29），则

$$\tan\beta=\frac{r}{r'}.$$

【1055】 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 在下列各点处的切线和法线方程：

(1) $A(-1,0)$；(2) $B(2,3)$；(3) $C(3,0)$.

解 由于

$$y'=\sqrt[3]{3-x}-\frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以，在 A 点的切线方程为

$$y-0=y'|_{x=-1}(x+1),\quad 即\ y=\sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1),\quad 即\ y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为 $y-3=y'|_{x=2}(x-2)$，即 $y=3$；法线方程为 $x=2$.

在 C 点，由于 y' 为无穷，故切线方程为 $x=3$；法线方程为 $y=0$.

【1056】 在曲线 $y=2+x-x^2$ 上的哪些点，其切线(1)平行于 Ox 轴；(2)平行于第一象限角的平分线？

解 由于 $y'=1-2x$，所以，有

(1) 令 $y'=0$，则 $x=\frac{1}{2}$，$y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，故在点$(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$处其切线平行于 Ox 轴；

(2) 令 $y'=1$，则 $x=0$，$y=2$，故在点$(0,2)$处其切线平行于第一象限角的平分线.

【1057】 证明：抛物线

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\quad (a\neq 0,\ x_1<x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β $(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2})$ 彼此相等.

提示 先求出抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$；其次，再求得抛物线在点 A 及点 B 处切线的斜率分别为

$$k_A=y'\Big|_{x=x_1}\quad 及\quad k_B=y'\Big|_{x=x_2}.$$

由此即易证明 $\alpha=\beta$.

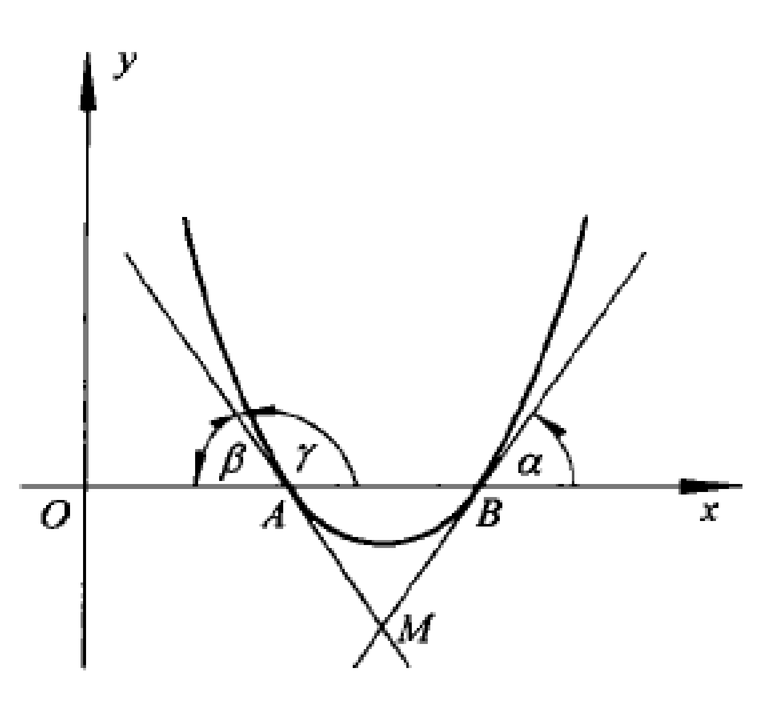


图 2.30

解 如图 2.30 所示，显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$. 由于 $y'=2ax-a(x_1+x_2)$，故在点 A、B 处切线的斜率分别为

$$k_A=y'\Big|_{x=x_1}=2ax_1-a(x_1+x_2)=a(x_1-x_2)=\tan\gamma=\tan(\pi-\beta),\tag{1}$$

$$k_B=y'\Big|_{x=x_2}=2ax_2-a(x_1+x_2)=a(x_2-x_1)=\tan\alpha.\tag{2}$$

由(2)式得

$$\tan(\pi-\alpha)=a(x_1-x_2).\tag{3}$$

由(1)式及(3)式证得 $\alpha=\beta$.

【1058】 在曲线 $y=2\sin x$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 上求出"曲线的坡度"(即 $|y'|$)大于 1 的区域.

解 由于 $y'=2\cos x$，故要 $|y'|>1$，只要 $|\cos x|>\frac{1}{2}$，也即

$$|x|<\frac{\pi}{3}\quad 及\quad \frac{2\pi}{3}<|x|\leqslant\pi,$$

此即所求的区域.

【1059】 函数 $y=x$ 及 $y_1=x+0.01\cdot\sin 1000\pi x$ 二者相差不大于 0.01，这些函数的导数的差的最大值如何？作出相应的图像.

解 导数差的最大值

$$\max|y'-y_1'|=\max|10\pi\cdot\cos 1000\pi x|=10\pi\approx 31.4.$$

由此可见，两函数相差甚微时(图 2.31)，其导数却可相差很大. 如图 2.32 所示.

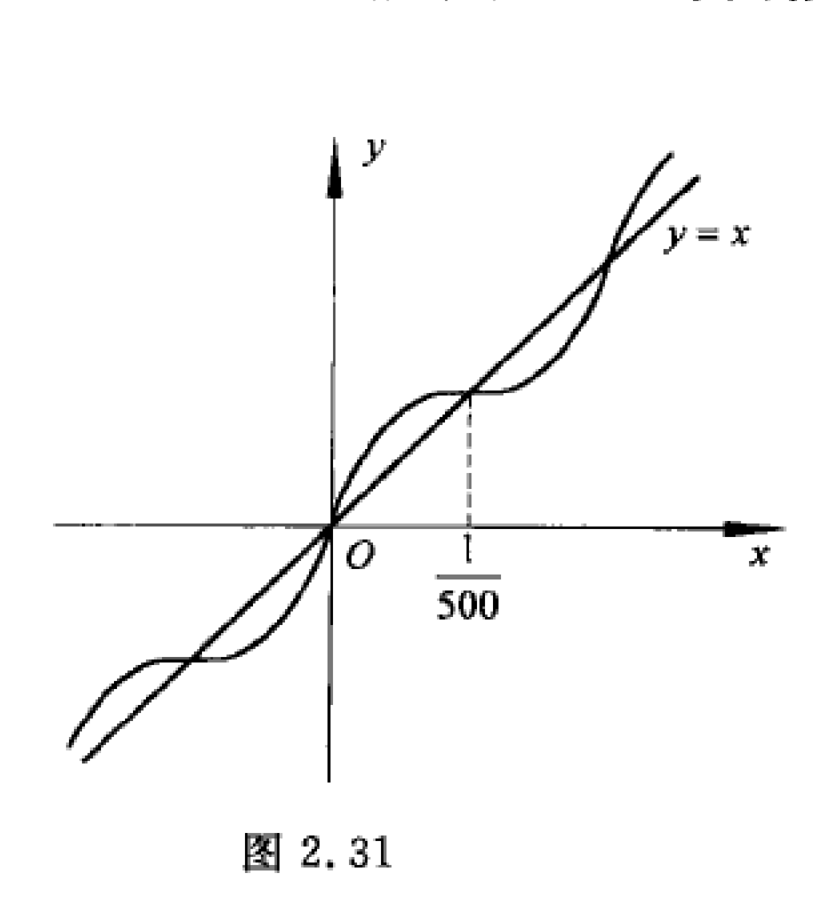


图 2.31

图 2.32

【1060】 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何？

解 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴的交点为(1,0)，设曲线与 Ox 轴的相交角为 α，则

$$\tan\alpha=y'\Big|_{x=1}=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1,$$

故交角 α 为 45°.

【1061】 曲线 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 相交的角如何？

解 两曲线的交点为(0,0)及(1,1). 由于导数为 $y'=2x$ 及 $y'=\frac{1}{2y}$，故在(0,0)点两曲线的交角显然为 90°.

在(1,1)点两切线的斜率分别为 $k_1=2$ 及 $k_2=\frac{1}{2}$，故其交角 θ 的正切为

$$\tan\theta=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4},$$

于是，$\theta=\arctan\frac{3}{4}\approx 37°$.

【1062】 曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 相交的角如何？

解 先求交点. 解 $\begin{cases}y=\sin x,\\ y=\cos x\end{cases}$ 得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ （k 为整数）.

其次，求两曲线在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处切线的斜率：

$$k_1=(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2},\quad k_2=(\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处，交角 θ(今取锐角，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$)满足

$$\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=2\sqrt{2}.$$

于是，$\theta=\arctan 2\sqrt{2}\approx 70°32'$.

【1063】 如何选择参数 n，可使曲线 $y=\arctan nx$ ($n>0$)与 Ox 轴相交所成的角大于 89°？

解 曲线 $y=\arctan nx$ 与 Ox 轴的交点为($k\pi$,0)(k 为整数). 不妨取 $0\leqslant x<\pi$，则交点为 $O(0,0)$. 交角的正切为

$$\tan\theta=\frac{n}{1+n^2x^2}\Big|_{x=0}=n.$$

$\theta>89°$，相当于 $\tan\theta>\tan 89°=57.29$，即 $n>57.29$.

【1064】 求出曲线：(1) $y=\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x=0$ 处，(2) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x=1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

提示 (1) $y'_-(0)=-|a|$，$y'_+(0)=|a|$. 于是，夹角 θ 满足 $\tan\theta=\frac{2|a|}{|a|^2-1}$.

(2) $y'_-(1)=1$，$y'_+(1)=-1$. 于是，夹角为 90°.

解 (1)函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}=\lim_{x\to -0}\left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}\right]=-|a|,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}=\lim_{x\to +0}\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}=|a|.$$

所以，于点 $x=0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{2|a|}{|a|^2-1},\quad 即\ \theta=2\arctan\frac{1}{|a|}.$$

(2) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-\arcsin1}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x}=1,$$

同理，　$y'_+(1)=-1$.

因此，左、右切线的斜率互为负倒数，所以，夹角为 90°.

【1065】 证明：对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$（a 及 m 为常数）的切线与切点的径向量所成的角度为一常量.

证　设切线与切点的径向量所成的角为 β，由于 $r=ae^{m\varphi}$，$r'=ame^{m\varphi}$，所以，$\tan\beta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{m}$，它为一常数，故 β 为一常量.

【1066】 求曲线 $y=ax^n$ 的次切线长，由此给出作这曲线的切线的方法.

解　设在任一点 $M(x,y)$ 的次切线长为 l_T，如图 2.33 中的 $|PT|$，则

$$l_T=\left|\frac{y}{\tan\alpha}\right|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{ax^n}{nax^{n-1}}\right|=\left|\frac{x}{n}\right|.$$

因此，该曲线的切线可以这样作：对于曲线 $y=ax^n$ 上任一点 $M(x,y)$，由此点向 Ox 轴作垂线，得交点 P. 再在 Ox 轴上取点 T，使 $|PT|=\frac{|x|}{n}$（当然，只是在 P 的一侧取点 T，若在此点 $yy'>0$，则在 P 点的左侧取 T；若在此点 $yy'<0$，则在 P 点的右侧取 T. 以后不再说明），然后连接 MT，则 MT 就是所求的切线.

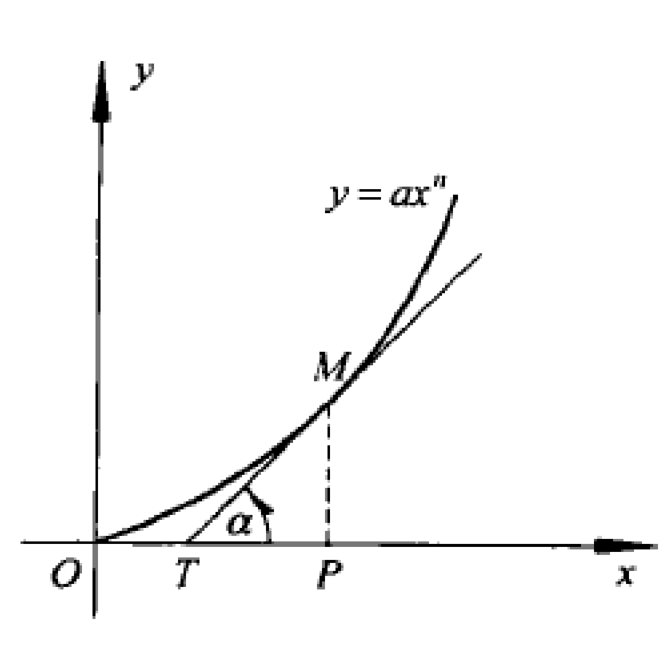


图 2.33

【1067】 证明：对于抛物线 $y^2=2px$，(1)次切线长等于切点的横坐标(绝对值)的两倍；(2)次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证　(1) 次切线长为

$$l_T=|PT|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{y}{\frac{p}{y}}\right|=\left|\frac{y^2}{p}\right|=\left|\frac{2px}{p}\right|=2|x|,$$

所以，次切线长为切点横坐标(绝对值)的两倍.

(2) 次法线长为 $l_N=|PN|=|yy'|=\left|y\cdot\frac{p}{y}\right|=|p|$，所以，次法线长为一常量.

由此，抛物线的切线可以这样作：由曲线 $y^2=2px$ 上的任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线，得交点 P. 由于 $yy'=p$，故当 $p>0(p<0)$ 时，在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T，如图 2.34，使 $|PT|=2|x|$，连接 MT，此即所求的切线.

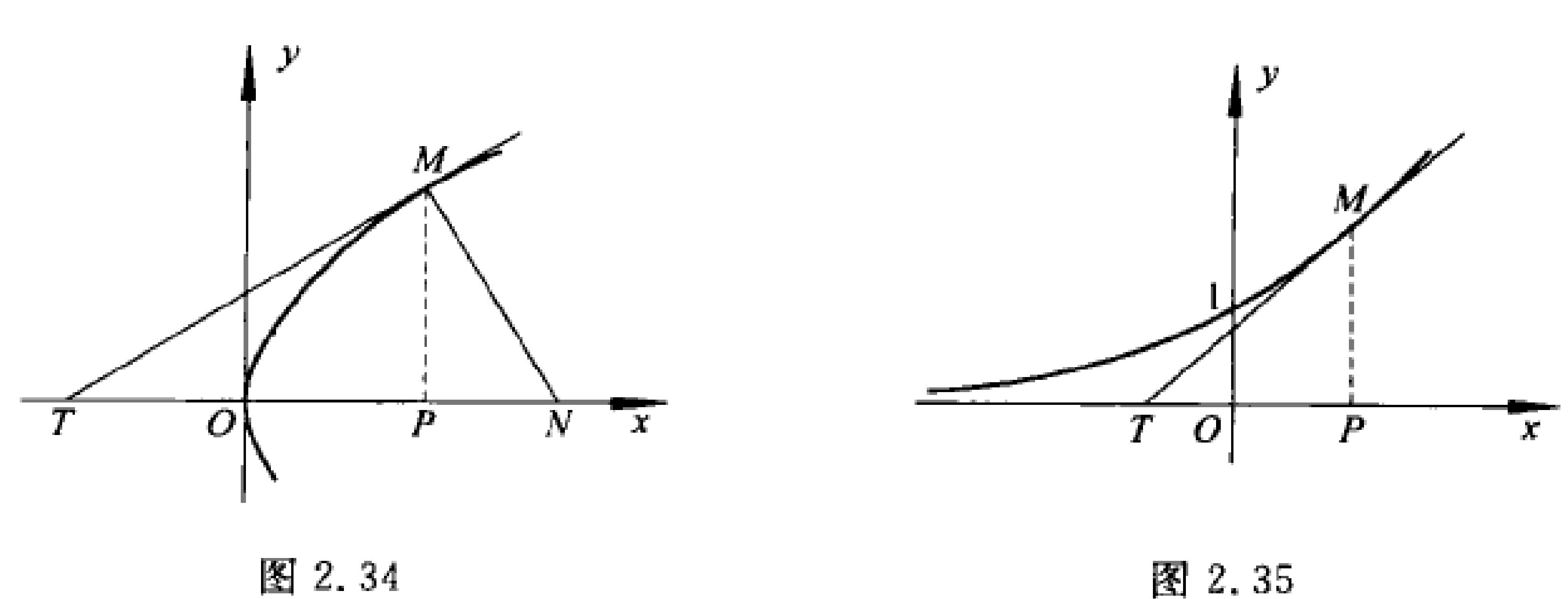


图 2.34　　　　图 2.35

【1068】 证明：指数曲线 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证　次切线长为 $l_T=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{a^x}{a^x\ln a}\right|=\frac{1}{|\ln a|}$. 从而 l_T 为常量.

由此，该曲线的切线可以这样作：对于曲线 $y=a^x$ 上任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线，得交点 P. 由于当 $a>1$ 时 $yy'>0$，当 $0<a<1$ 时 $yy'<0$，故在 Ox 轴上点 P 的左侧（当 $a>1$ 时）或右侧（当 $0<a<1$ 时）取点 T，使 $|PT|=\frac{1}{|\ln a|}$，连接 MT，此即所求的切线（图 2.35）.

【1069】 求悬链线 $y=a\text{ch}\,\frac{x}{a}$ 上任意一点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$|MN|=|y|\sqrt{1+y'^2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

由于 $y'=a\cdot\frac{1}{a}\text{sh}\,\frac{x}{a}=\text{sh}\,\frac{x}{a}$，$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\text{sh}^2\,\frac{x}{a}}=\left|\text{ch}\,\frac{x}{a}\right|=\left|\frac{y}{a}\right|$，

故

$$|MN|=|y_0|\cdot\left|\frac{y_0}{a}\right|=\frac{y_0^2}{|a|},\quad 即\quad |MN|=\frac{y_0^2}{|a|}\quad(a\neq 0).$$

【1070】 证明：星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证明思路 对于星形线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 处，容易求得其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}\,(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\ 及\ l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是，切线介于坐标轴间部分的长为 $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$，经计算得 $l=a$. 从而命题获证.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 处，其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}\,(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\quad 及\quad l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是，切线在两坐标轴间的部分长为 $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$. 由于

$$\begin{aligned}l_x^2+l_y^2&=x_0^2+y_0^2+3x_0\sqrt[3]{x_0y_0^2}+3y_0\sqrt[3]{x_0^2y_0}=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2}+\sqrt[3]{y_0^2})\\&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{a^2x_0^2y_0^2}=(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})^3+y_0^2+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\&=a^2-3a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2-3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\&=a^2-3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2,\end{aligned}$$

故 $l=a$，即星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

【1071】 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 Ox 轴相切，则系数 a,b,c 间的关系如何？

提示 切点的横坐标满足 $y'=0$ 及 $y=0$. 由此可得 $b^2-4ac=0$.

解 由方程 $y=ax^2+bx+c$ 求得导数 $y'=2ax+b$. 要抛物线与 Ox 轴相切，需 $y'=0$，所以，

$$2ax+b=0,$$

即

$$x=-\frac{b}{2a};\tag{1}$$

另一方面，切点的横坐标满足：

$$ax^2+bx+c=0$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\,.\tag{2}$$

比较(1)式及(2)式,得

$$b^2-4ac=0,$$

此即所求的 a,b,c 间的关系.

【1072】 在什么条件下,立方抛物线 $y=x^3+px+q$ 与 Ox 轴相切?

提示 仿 1071 题,由 $y'=0$ 及 $y=0$ 可得 $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$.

解 由方程 $y=x^3+px+q$ 求得 $y'=3x^2+p$. 要此曲线与 Ox 轴相切,必须满足

$$\begin{cases}3x^2+p=0, & (1)\\ x^3+px+q=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2+p)=-q$,两端平方,则

$$x^2(x^2+p)^2=q^2. \qquad (3)$$

以(1)式代入(3)式,得

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2, \quad 即 \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

此即所求的条件.

【1073】 当参数 a 为何值时,抛物线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切?

解 按题意,我们有

$$(ax^2)'=(\ln x)' \quad 即 \quad x^2=\frac{1}{2a} \quad (a\neq 0),$$

从而,$y=a\cdot\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$.

同时,由于在切点相切,其纵坐标也必须相等,所以

$$\ln x=\frac{1}{2}, \quad 即 \quad x=\sqrt{e}.$$

最后得到 $a=\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2e}$.

【1074】 证明:曲线

$$y=f(x) \quad [f(x)>0] \quad 及 \quad y=f(x)\sin ax,$$

于公共点彼此相切,其中 $f(x)$ 为可微函数.

证 解曲线方程

$$\begin{cases}y=f(x),\\ y=f(x)\sin ax,\end{cases}$$

得 $\sin ax=1$, $x=\frac{(4k+1)\pi}{2a}$(k 为整数),这就是两曲线交点的横坐标. 两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$k_1=f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right),$$

$$k_2=f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right)\sin\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right)+a\cos\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right)f\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right)=f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right).$$

从而,$k_1=k_2$,所以,两曲线在公共点彼此相切.

【1075】 证明:双曲线族 $x^2-y^2=a$ 及 $xy=b$ 形成一正交网,就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2-y^2=a$ 与双曲线 $xy=b$ 相交于点 $P(x,y)$,则在此点双曲线 $x^2-y^2=a$ 的切线的斜率 k_1 满足:$2x-2yk_1=0$,所以,

$$k_1=\frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy=b$ 的切线的斜率 k_2 满足:$y+xk_2=0$,所以,

$$k_2=-\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1k_2=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)=-1.$$

因此，两双曲线交成直角，故此两曲线族形成一正交网.

【1076】 证明：抛物线族 $y^2=4a(a-x)$ $(a>0)$及 $y^2=4b(b+x)$ $(b>0)$形成正交网.

证 设抛物线 $y^2=4a(a-x)$与抛物线 $y^2=4b(b+x)$相交于点 $P(x,y)$，则在此点 $y^2=4a(a-x)$的切线的斜率 k_1 满足：$2yk_1=-4a$，所以，

$$k_1=-\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2=4b(b+x)$的切线的斜率 k_2 满足：$2yk_2=4b$，所以

$$k_2=\frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1k_2=-\frac{4ab}{y^2}. \tag{1}$$

但点 $P(x,y)$同时在这两条抛物线上，故

$$4a(a-x)=4b(b+x).$$

于是，$x=a-b$，且

$$y^2=4a(a-a+b)=4ab. \tag{2}$$

以(2)式代入(1)式，得知在交点处，两切线的斜率满足

$$k_1k_2=-1,$$

故此两切线直交. 由此可知，该两抛物线族形成正交网.

【1077】 写出曲线 $x=2t-t^2$，$y=3t-t^3$ 在下列各点处的切线和法线的方程：(1)$t=0$，(2)$t=1$.

解 由于$\frac{dy}{dx}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t)$，所以，有

(1) 当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$.

切线方程为 $y=\frac{3}{2}x$，即 $3x-2y=0$；法线方程为 $y=-\frac{2}{3}x$，即 $2x+3y=0$.

(2) 当 $t=1$ 时，$x=1$，$y=2$，$\frac{dy}{dx}=3$.

切线方程为 $y-2=3(x-1)$，即 $3x-y-1=0$；法线方程为 $y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$，即 $x+3y-7=0$.

【1078】 写出曲线 $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}$，$y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$在下列各点的切线与法线的方程：

(1)$t=0$，(2)$t=1$，(3)$t=\infty$.

解 由于$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}$，所以，有

(1) 当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，$\frac{dy}{dx}=1$. 切线方程为 $y=x$；法线方程为 $y=-x$.

(2) 当 $t=1$ 时，$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，$\frac{dy}{dx}=3$.

切线方程为 $y-\frac{1}{2}=3\left(x-\frac{3}{2}\right)$，即 $3x-y-4=0$；法线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$，即 $x+3y-3=0$.

(3)当 $t=\infty$时，$x=0$，$y=0$，$\frac{dy}{dx}=-1$.（意即：当 $t\to\infty$时，$x\to0$，$y\to0$，$\frac{dy}{dx}\to-1$）.

切线方程为 $y=-x$；法线方程为 $y=x$.

【1079】 写出摆线(旋轮线)

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

上任意一点 $t=t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=t_0}=\left.\cot\frac{t}{2}\right|_{t=t_0}=\cot\frac{t_0}{2}.$$

于是,切线方程为

$$y-a(1-\cos t_0)=\cot\frac{t_0}{2}\cdot[x-a(t_0-\sin t_0)],$$

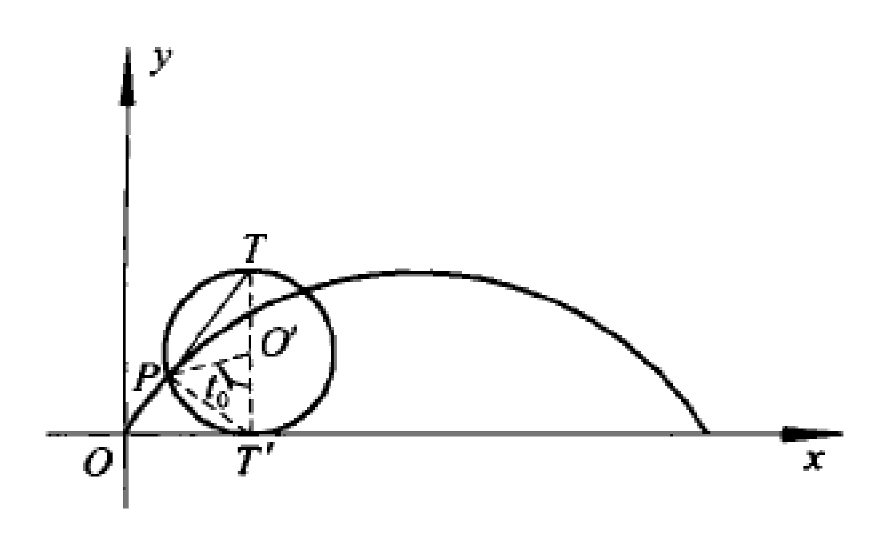


图 2.36

化简得

$$y-2a=(x-at_0)\cot\frac{t_0}{2}.$$

由此可知,切线通过点$(at_0, 2a)$,其斜率为 $\cot\frac{t_0}{2}$. 如图 2.36 中所示,$\angle T'O'P=t_0$,而

$$OT'=\overset{\frown}{T'P}=at_0,\quad T'T=2a,$$

故 T 点的坐标为$(at_0,2a)$,它在切线上. 其次,连接 PT 及 PT',则 $PT'\perp PT$,

$$k_{PT}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\angle PTT'\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t_0}{2}\right)=\cot\frac{t_0}{2}.$$

这样,PT 就通过点$(at_0,2a)$,且其斜率为 $\cot\frac{t_0}{2}$,所以,直线 PT 即为所求的切线. 于是摆线的切线可以这样作:先连接切点与滚动的圆的接触点(即点 P),然后,过 P 作其垂直线,此即所求的切线.

【1080】 证明:曳物线$\begin{cases}x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right),\\ y=a\sin t\quad(a>0,\ 0<t<\pi)\end{cases}$ 有长度不变的切线.

证明思路 切线长为 $l=\left|\frac{y}{y_x'}\right|\sqrt{1+y_x'^2}$,而

$$y_x'=\frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)}=\frac{\sin t}{\cos t}.$$

代入,经计算得 $l=|a|$,它是常量,从而命题获证.

证 切线长$=\left|\frac{y}{y_x'}\right|\sqrt{1+y_x'^2}$,而$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)}=\frac{\sin t}{\cos t}$,

所以,

$$\left|\frac{y}{y_x'}\right|\sqrt{1+y_x'^2}=\left|\frac{a\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right|\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=|a|\,|\cos t|\cdot\frac{1}{|\cos t|}=|a|,$$

这是一个常量,故曳物线有长度不变的切线.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

【1081】 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, $M(6, 6.4)$.

解 由于 $y'=-\frac{64x}{100y}=-\frac{16x}{25y}$,从而,点 M 处的导数为 $y'\Big|_M=-\frac{16\times6}{25\times6.4}=-\frac{3}{5}$,此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以,切线方程为 $y-6.4=-\frac{3}{5}(x-6)$, 即 $3x+5y-50=0$;

法线方程为 $y-6.4=\frac{5}{3}(x-6)$, 即 $5x-3y-10.8=0$.

【1082】 $xy+\ln y=1$， $M(1,1)$.

解 先求 y'. 由于 $xy'+y+\frac{y'}{y}=0$,从而，

$$y'=-\frac{y^2}{xy+1},\quad y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2},$$

故切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$;法线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

§4. 函数的微分

1° **函数的微分** 若自变量为 x 的函数 $y=f(x)$之增量可表为以下形式：

$$\Delta y=A(x)\mathrm{d}x+o(\mathrm{d}x),$$

其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$,则此增量的线性部分称为函数 y 的微分：

$$\mathrm{d}y=A(x)\mathrm{d}x.$$

函数 $y=f(x)$的微分存在的充分必要条件为存在有限的导数$y'=f'(x)$,这时我们有

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若自变量 x 为另一自变量的函数,公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶微分的不变性).

2° **函数的微小增量的估计** 为了计算可微函数 $f(x)$的微小增量,可利用公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x)\neq 0$,则当$|\Delta x|$充分小时,它的相对误差可以任意地小.

例如,若自变量 x 的绝对误差等于$|\Delta x|$,则函数 $y=f(x)$的绝对误差$|\Delta y|$和相对误差δy 可用下列公式近似地表示出来：

$$|\Delta y|=|f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y=|[\ln f(x)]'\Delta x|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

【1083】 设：(1) $\Delta x=1$; (2) $\Delta x=0.1$; (3) $\Delta x=0.01$.

对于函数 $f(x)=x^3-2x+1$,求:(1)$\Delta f(1)$; (2)$\mathrm{d}f(1)$,并比较它们.

解 $\Delta f=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-2(1+\Delta x)+1-(1-2+1)=\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$,

$\mathrm{d}f(1)=f'(1)\Delta x=(3x^2-2)\big|_{x=1}\cdot\Delta x=\Delta x$,

将所求值列表如下：

		$\Delta f(1)$	$\mathrm{d}f(1)$
Δx		$\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$	Δx
(1)	$\Delta x=1$	5	1
(2)	$\Delta x=0.1$	0.131	0.1
(3)	$\Delta x=0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出,当 Δx 值愈小时,$\Delta f(1)$与 $\mathrm{d}f(1)$之差就愈小.

【1084】 设运动方程由公式

$$x=5t^2,$$

给出,其中 t 以 s 来度量,x 以 m 来度量.若(1)$\Delta t=1$s,(2)$\Delta t=0.1$s,(3)$\Delta t=0.001$s,对于 $t=2$s 的时刻,求路线的增量 Δx 及路线的微分 $\mathrm{d}x$,并作比较.

解 $\Delta x=5(2+\Delta t)^2-5\cdot 2^2=20\Delta t+5(\Delta t)^2$,

$$\mathrm{d}x = x'_t\Big|_{t=2}\cdot\Delta t = 10t\Big|_{t=2}\cdot\Delta t = 20\Delta t,$$

(1) 当 $\Delta t = 1\text{s}$ 时，$\Delta x = 25\text{m}$，$\mathrm{d}x = 20\text{m}$；

(2) 当 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，$\Delta x = 2.05\text{m}$，$\mathrm{d}x = 2\text{m}$；

(3) 当 $\Delta t = 0.001\text{s}$ 时，$\Delta x = 0.020005\text{m}$，$\mathrm{d}x = 0.02\text{m}$.

由上可以看出，当 Δt 愈小时，$\Delta x - \mathrm{d}x$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分：

【1085】 $y = \dfrac{1}{x}$.

解 $y' = -\dfrac{1}{x^2}$， $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ $(x \neq 0)$.

【1086】 $y = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

解 $y' = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{1}{a^2+x^2}$， $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

【1087】 $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$.

解 $y' = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$，

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} \quad (|x| \neq |a|).$$

【1088】 $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$.

解 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$， $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}$.

【1089】 $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

解 $y' = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\dfrac{1}{a} = \dfrac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}$，

$$\mathrm{d}y = \frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \quad (|x| < |a|).$$

【1090】 求：

(1) $\mathrm{d}(xe^x)$； (2) $\mathrm{d}(\sin x - x\cos x)$； (3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$；

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$； (5) $\mathrm{d}(\sqrt{a^2+x^2})$； (6) $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$；

(7) $\mathrm{d}\ln(1-x^2)$； (8) $\mathrm{d}\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$； (9) $\mathrm{d}\left[\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

解 (1) $\mathrm{d}(xe^x) = (xe^x)'\mathrm{d}x = e^x(x+1)\mathrm{d}x$；

(2) $\mathrm{d}(\sin x - x\cos x) = (\sin x - x\cos x)'\mathrm{d}x = x\sin x\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = -\dfrac{3}{x^4}\mathrm{d}x$ $(x \neq 0)$；

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ $(x > 0)$；

(5) $\mathrm{d}(\sqrt{a^2+x^2}) = \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$；

(6) $\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$；

(7) $\mathrm{d}\ln(1-x^2)=-\frac{2x\mathrm{d}x}{1-x^2}$ $(|x|<1)$；

(8) $\mathrm{d}\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{|x|}{x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$；

(9) $\mathrm{d}\left[\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]=\left[\frac{\cos^3x+2\sin^2x\cos x}{2\cos^4x}+\frac{1}{2\cos x}\right]\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3x}$

$(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，k 为整数)．

设 u,v,w 为 x 的可微函数，求下列函数 y 的微分：

【1091】 $y=uvw$.

解 $\mathrm{d}y=vw\mathrm{d}u+uw\mathrm{d}v+uv\mathrm{d}w$.

【1092】 $y=\frac{u}{v^2}$.

解 $\mathrm{d}y=\frac{v^2\mathrm{d}u-2uv\mathrm{d}v}{v^4}=\frac{v\mathrm{d}u-2u\mathrm{d}v}{v^3}$ $(v\neq0)$.

【1093】 $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

解 $\mathrm{d}y=-\frac{1}{2(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}(2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v)=-\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(u^2+v^2>0)$.

【1094】 $y=\arctan\frac{u}{v}$.

解 $\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0,\ v\neq0)$.

【1095】 $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $\mathrm{d}y=\frac{2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v}{2(u^2+v^2)}=\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$.

【1096】 求：(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)$； (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^+$； (3) $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}(\cos x)}$；

(4) $\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\mathrm{d}(\cot x)}$； (5) $\frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}(\arccos x)}$.

提示 (2) 由于$\frac{\sin x}{x}$为偶函数，故不妨设 $x>0$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right).$$

解 (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}[x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3]=1-4x^3-3x^6$；

(2) 由于$\frac{\sin x}{x}$为偶函数，故不妨设 $x>0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2x}\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3},$$

显然，上述结果对于也 $x<0$ 是正确的 $(x\neq0)$.

(3) $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}(\cos x)}=\frac{\cos x\mathrm{d}x}{-\sin x\mathrm{d}x}=-\cot x$ $(x\neq k\pi$，k 为整数)；

(4) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}=\frac{d}{d(\cot x)}\left(\frac{1}{\cot x}\right)=-\frac{1}{\cot^2 x}=-\tan^2 x \quad (x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$ 为整数)；

(5) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}=-1 \quad (|x|<1)$.

【1097】 有半径为 $R=100$cm 及圆心角 $\alpha=60°$的扇形.若(1)其半径 R 增加 1cm；(2)角 α 减小 $30'$，则扇形面积的变化如何？求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A=\frac{1}{2}R^2\alpha$，其增量

$$\Delta A=\frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2-R^2]=\alpha R\Delta R+\frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,\quad 或\quad \Delta A=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA=R\alpha dR,\quad 或\quad dA=\frac{1}{2}R^2 d\alpha.$$

增量是精确的解，微分是近似的解.

(1) 当 $R=100$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\Delta R=1$ 时，

$\Delta A=\frac{\pi}{6}(200+1)=105.2\text{cm}^2$，$\quad dA=100\cdot\frac{\pi}{3}=104.7\text{cm}^2$(增加).

(2) 当 $\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$时，

$\Delta A=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6\text{cm}^2$，$\quad dA=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6\text{cm}^2$(减少).

【1098】 摆的振动周期(以 s 计算)按下式确定：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以 cm 计，$g=981\text{cm/s}^2$ 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 0.05s，对摆长 $l=20$cm 的长度需作多少修改？

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l}}dl=\frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将 $dT=0.05$，$g=981$，$l=20$ 代入上式，即得

$$dl=\frac{0.05\times\sqrt{981\times 20}}{3.1416}\approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23cm.

利用函数之微分代替函数的增量，求下列各式之近似值：

【1099】 $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x_0=1$，$\Delta x=0.02$，则

$$f'(x_0)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{3},\quad df(x_0)=f'(x_0)\Delta x=0.0066.$$

于是，

$$\sqrt[3]{1.02}=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0)=1+0.0066$$

即 $\sqrt[3]{1.02}\approx 1.007$.

【1100】 $\sin 29°$.

解 设 $f(x)=\sin x$，$x_0=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=-\frac{\pi}{180}$，则 $\sin 29°\approx\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}=0.4849$.

【1101】 $\cos 151°$

解 设 $f(x)=\cos x$，$x_0=\frac{5\pi}{6}$，$\Delta x=\frac{\pi}{180}$，则 $\cos 151°\approx\cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=-0.8748$.

【1102】 $\arctan 1.05$.

解 设 $f(x)=\arctan x$，$x_0=1$，$\Delta x=0.05$，则

$$\arctan 1.05\approx\arctan 1+0.05\cdot\frac{1}{2}=0.8104(\text{弧})=46°26'.$$

【1103】 $\lg 11$.

解 $\lg 11=\lg 10+\lg 1.1=1+\lg 1.1$.

设 $f(x)=\lg x$，$x_0=1$，$\Delta x=0.1$，则

$$\lg 1.1\approx\lg 1+\frac{0.1}{\ln 10}=\frac{0.1}{2.3026}=0.0434,$$

于是，$\lg 11\approx 1.0434$.

【1104】 证明近似公式：

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\quad(a>0),$$

其中 $|x|\ll a$（正数 A 和 B 之间的关系式 $A\ll B$ 表示 A 远小于 B）.

利用这个公式近似地计算：(1) $\sqrt{5}$；(2) $\sqrt{34}$；(3) $\sqrt{120}$. 并与平方表中的数值比较.

证 设 $f(y)=\sqrt{y}$，$y_0=a^2$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y\quad(\text{当}\,|\Delta y|\ll\sqrt{y_0}\,\text{时}).$$

于是，$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$ （当 $|x|\ll a$ 时）.

(1) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}\approx 2+\frac{1}{4}=2.25$，查表：$\sqrt{5}=2.24$；

(2) $\sqrt{34}=\sqrt{6^2-2}\approx 6-\frac{2}{2\cdot 6}=5.833$，查表：$\sqrt{34}=5.831$；

(3) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}\approx 11-\frac{1}{2\cdot 11}=10.9546$，查表：$\sqrt{120}=10.9545$.

【1105】 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad(a>0).$$

其中 $|x|\ll a$. 利用此公式近似地计算：

(1) $\sqrt[3]{9}$； (2) $\sqrt[4]{80}$； (3) $\sqrt[7]{100}$； (4) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y)=\sqrt[n]{y}$，$y_0=a^n$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx\sqrt[n]{a^n}+\frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}}=a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad(\text{当}\,|x|\ll a\,\text{时}).$$

(1) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2^3+1}\approx 2+\frac{1}{3\cdot 2^2}=2.083$，查表：$\sqrt[3]{9}=2.080$；

(2) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{3^4-1}\approx 3-\frac{1}{4\cdot 3^3}=2.9907$，查表：$\sqrt[4]{80}=2.9905$；

(3) $\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{2^7-28}\approx 2-\frac{28}{7\cdot 2^6}=1.938$，查表：$\sqrt[7]{100}=1.931$；

(4) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.9953$，查表：$\sqrt[10]{1000}=1.9953$.

【1106】 正方形的边 $x=2.4\text{m}\pm 0.05\text{m}$. 由此计算所得正方形的面积的相对误差和绝对误差如何？

解 正方形的面积 $A=x^2$. 于是，面积的相对误差为

$$\delta_A=\left|\frac{\Delta A}{A}\right|\approx\left|\frac{2x\Delta x}{x^2}\right|=2\left|\frac{\Delta x}{x}\right|=2\cdot\frac{0.05}{2\cdot 4}=4.2\%;$$

而绝对误差为

$$|\Delta A|=|2.45^2-2.4^2|=0.24\text{m}^2.$$

【1107】 为了在 1% 的精度下计算出球的体积，问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何？

解 球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，从而，

$$\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2\mathrm{d}R=V\frac{3\mathrm{d}R}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍：

$$\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=3\left|\frac{\mathrm{d}R}{R}\right|.$$

因而，半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R=\frac{1}{3}\delta_V\leqslant\frac{1}{3}\cdot 0.01=0.33\%.$$

【1108】 为了确定重力加速度，可以利用摆的振动公式 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$，其中 l 为摆长，T 为振动周期. 当测量(1)摆长 l，(2)周期 T 时，相对误差 δ 如何影响 g 的值？

解 (1) $\delta_g=\left|\frac{\mathrm{d}g}{g}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}l}{l}\right|$. 于是，$\delta_g=\delta_l$，即 g 的相对误差等于摆长 l 的相对误差.

(2) $\delta_g=\left|\frac{-8\pi^2 l\cdot T^2\mathrm{d}T}{T^3\cdot 4\pi^2 l}\right|=2\left|\frac{\mathrm{d}T}{T}\right|$，于是，$\delta_g=2\delta_T$，即 g 的相对误差是周期 T 的相对误差的 2 倍.

【1109】 求数 $x(x>0)$ 的常用对数(以 10 为底)的绝对误差，设此数的相对误差等于 δ.

解 设 $f(x)=\ln x$，若数 δ 很小，则有

$$\ln(1+\delta)\approx\delta.$$

因而，所要求的绝对误差

$$|\lg(x+\Delta x)-\lg x|=\left|\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right|=|\lg(1+\delta)|=\frac{1}{\ln 10}\ln(1+\delta)\approx 0.43\delta.$$

【1110】 证明：根据正切对数表求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$\mathrm{d}(\lg\tan\varphi)=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\ln 10\cdot\tan\varphi\cos^2\varphi}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\ln 10\cdot\sin\varphi\cos\varphi},$$

于是，

$$|\mathrm{d}\varphi|=\ln 10\cdot|\sin\varphi|\cdot|\cos\varphi|\cdot|\mathrm{d}(\lg\tan\varphi)|;\tag{1}$$

而正弦对数函数的微分

$$\mathrm{d}(\lg\sin\varphi)=\frac{\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\ln 10\cdot\sin\varphi},$$

于是，

$$|\mathrm{d}\varphi|=\ln 10\cdot|\sin\varphi|\cdot\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|\cdot|\mathrm{d}(\lg\sin\varphi)|.\tag{2}$$

比较(1)式及(2)式的右端，由于假设确定 $\lg\sin\varphi$ 与 $\lg\tan\varphi$ 时，具有同样的误差，而 $\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|\geqslant 1\geqslant|\cos\varphi|$，故由(2)式确定的 $|\mathrm{d}\varphi|$ 不比(1)式的 $|\mathrm{d}\varphi|$ 小. 这就证明了求角度时用正切对数表更为精确.



§5. 高阶的导数和微分

1° **基本定义** 函数 $y=f(x)$的高阶导数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n=2,3,\cdots).$$

若函数 $f(x)$在区间(a,b)内有连续的导数 $f^{(n)}(x)$,则简写为:$f(x)\in C^{(n)}(a,b)$. 特别地,若函数 $f(x)$在(a,b)上有各阶导数,并且这些导数是连续的,则使用记号:$f(x)\in C^{(\infty)}(a,b)$.

函数 $y=f(x)$的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$\mathrm{d}^n y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y) \quad (n=2,3,\cdots),$$

其中认为 $\mathrm{d}^1 y=\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$.

若 x 为自变量,则认为:

$$\mathrm{d}^2 x=\mathrm{d}^3 x=\cdots=0.$$

这时成立公式

$$\mathrm{d}^n y=y^{(n)}\mathrm{d}x^n \quad 及 \quad y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

2° **基本公式** :

Ⅰ. $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a \quad (a>0)$; $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$;

Ⅱ. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$;

Ⅲ. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$;

Ⅳ. $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$;

Ⅴ. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3° **莱布尼茨公式** 若函数 $u=\varphi(x)$及 $v=\psi(x)$有 n 阶导数(n 阶可微),则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v, C_n^i$ 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

类似地对于微分 $\mathrm{d}^n(uv)$得:

$$\mathrm{d}^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\mathrm{d}^{n-i}u\,\mathrm{d}^i v,$$

其中认为 $\mathrm{d}^0 u=u$ 及 $\mathrm{d}^0 v=v$.

求 y'',设:

【1111】 $y=x\sqrt{1+x^2}$.

解 $y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=\frac{4x\sqrt{1+x^2}-\frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【1112】 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$y''=\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (|x|<1).$$

【1113】 $y=e^{-x^2}$.

解 $y'=-2xe^{-x^2}$， $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1)$.

【1114】 $y=\tan x$.

解 $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$， $y''=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{2k+1}{2}\pi，k\text{ 为整数}\right)$.

【1115】 $y=(1+x^2)\arctan x$.

解 $y'=1+2x\arctan x$， $y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$.

【1116】 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$$y''=\frac{2x}{(1-x^2)^2}+\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(1-x^2)^3}$$

$$=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\quad(|x|<1).$$

【1117】 $y=x\ln x$.

解 $y'=1+\ln x$， $y''=\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

【1118】 $y=\ln f(x)$.

解 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$， $y''=\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$.

【1119】 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\cdot\frac{1}{x}[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]=2\cos(\ln x)$，

$y''=-\frac{2\sin(\ln x)}{x}$ $(x>0)$.

【1120】 设 $y=e^{\sin x}\cos(\sin x)$，求 $y(0)$，$y'(0)$及 $y''(0)$.

解 $y(0)=1$.

又 $y'=e^{\sin x}[\cos x\cos(\sin x)-\cos x\sin(\sin x)]$. 于是，$y'(0)=e^0(1-0)=1$.

而 $y''=e^{\sin x}[\cos^2 x\cos(\sin x)-\cos^2 x\sin(\sin x)-\sin x\cos(\sin x)-\cos^2 x\sin(\sin x)$

$+\sin x\sin(\sin x)-\cos^2 x\cos(\sin x)]$

$=e^{\sin x}\{-2\cos^2 x\sin(\sin x)+\sin x[\sin(\sin x)-\cos(\sin x)]\}$，

于是， $y''(0)=e^0(0+0)=0$.

设 $u=\varphi(x)$及 $v=\psi(x)$为二阶可微函数，求 y''，设：

【1121】 $y=u^2$.

解 $y'=2uu'$， $y''=2u'^2+2uu''=2(u'^2+uu'')$.

【1122】 $y=\ln\frac{u}{v}$.

解 $y'=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$， $y''=\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$ $(uv>0)$

【1123】 $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $y'=\frac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$，

$$y''=\frac{(uu''+u'^2+vv''+v'^2)\sqrt{u^2+v^2}-\frac{(uu'+vv')^2}{\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-v'u)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2+v^2>0)$.

【1124】 $y=u^v \quad (u>0)$.

解 $y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)$,

$$y''=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2+u^v\left[v''\ln u+\frac{u'v'}{u}+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right]$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u+\frac{2u'v'}{u}+\frac{v}{u^2}(uu''-u'^2)\right].$$

设 $f(x)$ 为三阶可微函数，求 y'' 及 y'''，设：

【1125】 $y=f(x^2)$.

解 $y'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$,

$y'''=4xf''(x^2)+8xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)=12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$.

【1126】 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $y'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$y''=\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y'''=-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\neq 0).$$

【1127】 $y=f(e^x)$.

解 $y'=e^xf'(e^x)$,

$y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$,

$y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$.

【1128】 $y=f(\ln x)$.

解 $y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$,

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)],$$

$$y'''=-\frac{2}{x^3}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]+\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-f''(\ln x)]=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$$

$(x>0)$.

【1129】 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $\varphi(x)$ 是充分多次可微函数.

解 $y'=\varphi'(x)f'[\varphi(x)]$,

$y''=\varphi'^2(x)f''[\varphi(x)]+\varphi''(x)f'[\varphi(x)]$,

$y'''=\varphi'^3(x)f'''[\varphi(x)]+3\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)]+\varphi'''(x)f'[\varphi(x)]$.

【1130】 对于以下两种情形：(1) x 为自变量，(2) x 为中间变量，求函数 $y=e^x$ 的 d^2y.

解 (1) $dy=e^xdx$, $d^2y=e^xdx^2$;

(2) $dy=e^xdx$, $d^2y=e^xd^2x+e^xdx^2$.

若 x 为自变量，求 d^2y，设：

【1131】 $y=\sqrt{1+x^2}$.

解 $dy=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$， $y''=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，于是，$d^2y=\frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

【1132】 $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$， $y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$， 于是，$d^2y=\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$ $(x>0)$.

【1133】 $y=x^x$.

解 $y'=x^x(1+\ln x)$， $y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$，于是，$d^2y=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2$ $(x>0)$.

令 u 及 v 为变量 x 的二阶可微函数，求 d^2y，设：

【1134】 $y=uv$.

解 $dy=udv+vdu$，

$d^2y=dudv+ud^2v+dvdu+vd^2u=ud^2v+2dudv+vd^2u$.

【1135】+ $y=\frac{u}{v}$.

解 $dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$，

$$d^2y=\frac{v^2(dvdu+vd^2u-dudv-ud^2v)-2vdv(vdu-udv)}{v^4}=\frac{v(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^3}$$

$(v\neq 0)$.

【1136】 $y=u^mv^n$ （m 及 n 为常数）.

解 $dy=mu^{m-1}v^ndu+nu^mv^{n-1}dv$，

$$d^2y=m(m-1)u^{m-2}v^ndu^2+mu^{m-1}(v^nd^2u+nv^{n-1}dudv)+mnu^{m-1}v^{n-1}dudv$$
$$+n(n-1)u^mv^{n-2}dv^2+nu^mv^{n-1}d^2v$$
$$=u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2+2mnuvdudv+n(n-1)u^2dv^2]+uv(mvd^2u+nud^2v)\}.$$

【1137】 $y=a^u$ $(a>0)$.

解 $dy=a^u\ln a du$，

$d^2y=a^u\ln^2a\cdot du^2+a^u\ln a\cdot d^2u=a^u\ln a(\ln a\cdot du^2+d^2u)$ $(a>0)$.

【1138】 $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $dy=\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$，

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(du^2+ud^2u+dv^2+vd^2v)-2(udu+vdv)^2}{(u^2+v^2)^2}$$
$$=\frac{(v^2-u^2)du^2-4uvdudv+(u^2-v^2)dv^2+(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)}{(u^2+v^2)^2}\quad (u^2+v^2>0).$$

【1139】 $y=\arctan\frac{u}{v}$.

解 $dy=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$，

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)-2(udu+vdv)(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2}$$
$$=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)+2uv(dv^2-du^2)+2(u^2-v^2)dudv}{(u^2+v^2)^2}\quad (v\neq 0).$$

求以参数形式给出的函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$，设：

【1140】 $x=2t-t^2$， $y=3t-t^3$.

解 $$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(t+1),$$

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\frac{dy''_{x^2}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2-2t}=\frac{3}{8(1-t)^3}\quad (t\neq 1).$$

【1141】 $x=a\cos t$， $y=a\sin t$.

解 $$y'_x=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t,$$

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t}=-\frac{1}{a\sin^3 t},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\frac{3\cos t}{a\sin^4 t}}{-a\sin t}=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}\quad (t\neq k\pi，k\text{ 为整数}).$$

【1142】 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$.

解 $$y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},$$

$$y''_{x^2}=\frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\frac{\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^5\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}\quad (t\neq 2k\pi，k\text{ 为整数}).$$

【1143】 $x=e^t\cos t$， $y=e^t\sin t$.

解 $$y'_x=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right),$$

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}+t\right)},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\left[-\cos^{-3}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+3\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right]}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}$$

$(t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi，k$ 为整数$)$.

【1144】 $x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$.

解 $y'_x=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t$,

$y''_{x^2}=\frac{1}{f''(t)}$,

$y'''_{x^3}=-\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}\quad (f''(t)\neq 0)$.

【1145】 设函数 $y=f(x)$ 充分多次可微. 求反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数 $x',x'',x''',x^{(4)}$（设这些导数都存在）.

解 $x'=\frac{1}{y'}$,

$x''=-\frac{1}{y'^2}\frac{dy'}{dy}=-\frac{1}{y'^2}\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{y'^3}$,

$x'''=-\frac{y'''\cdot\frac{1}{y'}y'^3-3y'^2\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}\cdot y''}{y'^6}=-\frac{y'y'''-3y''^2}{y'^5}$,

$x^{(4)}=-\frac{y'^5\left(\frac{y''}{y'}y'''+y^{(4)}-6y''y'''\cdot\frac{1}{y'}\right)}{y'^{10}}-\frac{-5y'^4\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}(y'y'''-3y''^2)}{y'^{10}}$

$=-\frac{y'^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15y''^3}{y'^7}\quad (y'\neq 0)$.

求由下列隐函数给出的 $y=y(x)$ 的 y'_x,y''_{x^2} 及 y'''_{x^3}：

【1146】 $x^2+y^2=25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y',y'' 及 y''' 等于什么？

解 $y'=-\frac{x}{y}$,

$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{25}{y^3}$,

$y'''=\frac{75y'}{y^4}=-\frac{75x}{y^5}$,

在 $M(3,4)$ 点，得 $y'=-\frac{3}{4}$，$y''=-\frac{25}{64}$，$y'''=-\frac{225}{1024}$.

【1147】 $y^2=2px$.

解 $y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p}{y^2}y'=-\frac{p^2}{y^3}$，$y'''=\frac{3p^2}{y^4}y'=\frac{3p^3}{y^5}\quad (y\neq 0)$.

【1148】 $x^2-xy+y^2=1$.

解 对 x 求导，得

$2x-y-xy'+2yy'=0$, (1)

$y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. (2)

将(1)式两端再对 x 求导，得

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0, \tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式，得

$$y''=\frac{6}{(x-2y)^3}. \tag{4}$$

将(3)式两端对 x 求导，得

$$-3y''-xy'''+6y'y''+2yy'''=0, \tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式，得 $y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5} \quad (x\neq 2y)$.

求 y'_x 及 y''_{x^2}，设：

【1149】 $y^2+2\ln y=x^4$.

解 对 x 求导，得

$$2yy'+\frac{2y'}{y}=4x^3, \tag{1}$$

再对 x 求导，得

$$2y'^2+2yy''+\frac{2y''}{y}-\frac{2y'^2}{y^2}=12x^2. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得

$$y'=\frac{2x^3y}{1+y^2}, \quad y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)].$$

【1150】 $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan\frac{y}{x}} \quad (a>0)$.

解 取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x},$$

对 x 求导，得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2},$$

于是，

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

将上式对 x 求导，得

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \quad (x\neq y,\ x\neq 0).$$

【1151】 设函数 $f(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 时有定义且二阶可微. 应当如何选择系数 a,b 及 c，使函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0 \end{cases}$$

是二阶可微函数？

提示 注意 $F(x_0-0)=F(x_0+0)=F(x_0)$，$F'_-(x_0)=F'_+(x_0)$ 及 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$.

解 按题设 $F'(x)$ 存在，所以，$F(x)$ 在点 x_0 连续，即

$$\lim_{x\to x_0-0}F(x)=\lim_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=f(x_0).$$

于是，$c=f(x_0)$. 其次，由 $F'(x_0-0)=F'(x_0+0)$ 得

$$f'(x_0)=[2a(x-x_0)+b]\Big|_{x=x_0}=b,$$

再由 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$ 得 $f''(x_0)=2a$，于是，$a=\frac{1}{2}f''(x_0)$.

【1152】 质点作直线运动的规律为 $s=10+20t-5t^2$. 求其运动的速度和加速度. 在 $t=2$ 的时刻，速度与加速度等于什么？

解 速度 $v=\frac{ds}{dt}=20-10t$，$v\big|_{t=2}=0$；而加速度 $w=\frac{d^2s}{dt^2}=-10$，$w\big|_{t=2}=-10$.

【1153】 质点 $M(x,y)$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 匀速运动，运动一周的时间为 T. 若质点在时刻 $t=0$ 位于点

$M_0(a,0)$，求质点 M 的速度和加速度在 Ox 轴上的投影 v 和 w.

解 设点 M 的坐标为 (x,y)，由于 $\angle M_0OM=\frac{2\pi}{T}t$，从而，

$$x=a\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

于是，速度和加速度在 Ox 轴上的投影分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t,\quad w=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

【1154】 在重力场中，质点 $M(x,y)$ 在竖直平面 Oxy 内以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出. 建立运动方程（忽略空气阻力）并计算速度 v、加速度 w 的大小及运动轨迹. 质点的最大上升高度和射程等于多少？

解 若不考虑空气的阻力，则有

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程，得

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

即轨迹为一抛物线. 速度

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha-gt)^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\alpha},$$

而加速度

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}=\sqrt{0+(-g)^2}=g.$$

又 $\frac{dy}{dx}=\tan\alpha-\frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}$，在最大高度处，$\frac{dy}{dx}=0$. 此时

$$x=\frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

于是，最大上升高度为

$$H_{max}=\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

上式也可从 $\frac{dy}{dt}=0$ 解出 $t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$，再以 t 值代入 y 的表达式而得到. 在最大射程处有：$y=0$. 于是，

$$x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0,\quad 解得\quad x=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}.$$

从而，最大射程为 $\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$.

【1155】 质点的运动方程为

$$x=4\sin\omega t-3\cos\omega t,\quad y=3\sin\omega t+4\cos\omega t\quad (\omega 为常数).$$

求运动轨迹、速度与加速度的大小.

解 由于

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=16\sin^2\omega t+9\cos^2\omega t-24\sin\omega t\cos\omega t+9\sin^2\omega t+16\cos^2\omega t+24\sin\omega t\cos\omega t\\&=25(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=25.\end{aligned}$$

所以，运动轨迹为一以原点为中心，5 为半径的圆.

其次，速度与加速度的大小分别为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(4\omega\cos\omega t+3\omega\sin\omega t)^2+(3\omega\cos\omega t-4\omega\sin\omega t)^2}=5|\omega|,$$

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t+3\omega^2\cos\omega t)^2+(-4\omega^2\cos\omega t-3\omega^2\sin\omega t)^2}=5\omega^2.$$

求下列指定阶的导数：

【1156】 $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$，求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式，最高次数为 6 次，因而，

$y^{(6)}=1\cdot 2^2\cdot 1^3\cdot 6!=4\cdot 6!=2880$，

$y^{(7)}=0$.

【1157】 $y=\frac{a}{x^m}$，求 y'''.

解 $y'=-amx^{-m-1}$，

$y''=am(m+1)x^{-m-2}$，

$$y'''=-am(m+1)(m+2)x^{-m-3}=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}\quad(x\neq 0).$$

【1158】 $y=\sqrt{x}$，求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{13}{2}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{17}{2}\right)x^{-\frac{19}{2}}$$

$$=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}\quad(x>0),$$

其中 $17!!=1\cdot 3\cdots 15\cdot 17$.

【1159】 $y=\frac{x^2}{1-x}$，求 $y^{(8)}$.

解 $y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}$，

$$y'=-1+\frac{1}{(1-x)^2},\quad y''=\frac{2}{(1-x)^3},\quad y'''=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},\quad\cdots,\quad y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}\quad(x\neq 1).$$

【1160】 $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求 $y^{(100)}$.

解 $y=(1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，利用莱布尼茨公式，得

$$y^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^i(1+x)^{(i)}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100-i)}=(1+x)\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100)}+C_{100}^1\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(99)}$$

$$=(1+x)\cdot\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}+100\cdot\frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}\quad(x<1).$$

【1161】 $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 $y^{(20)}=x^2(e^{2x})^{(20)}+2xC_{20}^1(e^{2x})^{(19)}+2C_{20}^2(e^{2x})^{(18)}=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$.

【1162】 $y=\frac{e^x}{x}$，求 $y^{(10)}$

解 $y^{(10)}=\sum\limits_{i=0}^{10}C_{10}^i e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)}=e^x\sum\limits_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$，其中 $A_{10}^i=10\cdot 9\cdots(11-i)$ 及 $A_{10}^0=1$.

【1163】 $y=x\ln x$，求 $y^{(5)}$.

解 $y'=1+\ln x$，$y''=\frac{1}{x}$，$\cdots$，$y^{(5)}=-\frac{3!}{x^4}\quad(x>0)$.

【1164】 $y=\frac{\ln x}{x}$，求 $y^{(5)}$.

解 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$$y''=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=-\frac{3-2\ln x}{x^3},$$

$$y'''=-\frac{-\frac{2}{x}\cdot x^3-3x^2(3-2\ln x)}{x^6}=\frac{11-6\ln x}{x^4},$$

$$y^{(4)}=\frac{-\frac{6}{x}\cdot x^4-4x^3(11-6\ln x)}{x^8}=-\frac{50-24\ln x}{x^5},$$

$$y^{(5)}=-\frac{-\frac{24}{x}\cdot x^5-5x^4(50-24\ln x)}{x^{10}}=\frac{274-120\ln x}{x^6}\quad(x>0).$$

【1165】 $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

解 $y^{(50)}=x^2(\sin 2x)^{(50)}+C_{50}^1\cdot 2x\cdot(\sin 2x)^{(49)}+2C_{50}^2(\sin 2x)^{(48)}$

$$=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50}{2}\pi\right)+100x\cdot 2^{49}\sin\left(2x+\frac{49}{2}\pi\right)+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2^{49}\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$

$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

【1166】 $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$，求 y'''.

解 $y'''=\cos 3x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'''+C_3^1(\cos 3x)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)''+C_3^2(\cos 3x)''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'$

$$+(\cos 3x)'''\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$$

$$=-\frac{28}{3^3}(-3)^3\cdot\frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}+3(-3\sin 3x)\left(\frac{4}{3^2}\right)(-3)^2\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}$$

$$+3(-3^2\cos 3x)\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)\frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}+3^3\sin 3x\,\frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x+\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x\quad\left(x\neq\frac{1}{3}\right).$$

【1167】 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$，求 $y^{(10)}$.

提示 利用三角公式易得 $y=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x$.

解 利用三角函数和、差与其积的互化公式，将 y 化简得

$$y=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x.$$

于是，

$$y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)-\frac{1}{4}\cdot 6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)+\frac{1}{4}\cdot 2^{10}\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)$$

$$=-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x-2^8\sin 2x.$$

【1168】 $y=x\,\mathrm{sh}x$，求 $y^{(100)}$.

解 $y^{(100)}=x(\mathrm{sh}x)^{(100)}+C_{100}^1(\mathrm{sh}x)^{(99)}=x\,\mathrm{sh}x+100\mathrm{ch}x$.

【1169】 $y=e^x\cos x$，求 $y^{(4)}$.

解 $y'=e^x(\cos x-\sin x)$,

$y''=e^x[(\cos x-\sin x)+(-\sin x-\cos x)]=-2e^x\sin x$,

$y'''=-2e^x(\sin x+\cos x)$,

$y^{(4)}=-2e^x[(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)]=-4e^x\cos x$.

【1170】 $y=\sin^2 x\ln x$，求 $y^{(6)}$，

解 $y=\frac{1-\cos 2x}{2}\ln x=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\ln x$.

$$y^{(6)}=\frac{(-1)^5}{2}\cdot\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{x^6}-\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot\ln x)^{(6)}$$

$$=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x.$$

在下列各例中，视 x 为自变量，求指定阶的微分.

【1171】 $y=x^5$，求 d^5y.

解 $d^5y=5!dx^5=120dx^5$.

【1172】 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，求 d^3y

解 $d^3y=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}dx^3=-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3\quad(x>0)$.

【1173】 $y=x\cos 2x$，求 $d^{10}y$.

解 $d^{10}y=(x\cos 2x)^{(10)}dx^{10}=\left[2^{10}x\cos\left(2x+\frac{10\pi}{2}\right)+10\cdot2^9\cos\left(2x+\frac{9}{2}\pi\right)\right]dx^{10}$

$=-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}$.

【1174】 $y=e^x\ln x$，求 d^4y.

解 $d^4y=(e^x\ln x)^{(4)}dx^4=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$.

【1175】 $y=\cos x\,\mathrm{ch}x$，求 d^6y.

解 $d^6y=(\cos x\,\mathrm{ch}x)^{(6)}dx^6=8\sin x\,\mathrm{sh}x\,dx^6$.

设 u 为 x 的充分多次可微函数，在下列各例中求指定阶的微分.

【1176】 $y=u^2$，求 $d^{10}y$.

解 $d^{10}y=d^{10}(u\cdot u)=\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i d^{10-i}u\,d^iu$

$$=ud^{10}u+10d^9udu+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}d^8ud^2u+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}d^7ud^3u+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}d^6ud^4u$$

$$+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}(d^5u)^2+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}d^4ud^6u$$

$$+\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}d^3ud^7u\,\frac{10\cdot9}{1\cdot2}d^2ud^8u+10dud^9u+ud^{10}u$$

$$=2ud^{10}u+20dud^9u+90d^2ud^8u+240d^3ud^7u+420d^4ud^6u+252(d^5u)^2.$$

【1177】 $y=e^u$，求 d^4y.

解 $dy=e^udu$，

$d^2y=e^udu^2+e^ud^2u$，

$d^3y=e^u[(du^3+dud^2u)+d(du^2)+d^3u]=e^u(du^3+3dud^2u+d^3u)$，

$d^4y=e^u[(du^4+3du^2d^2u+dud^3u)+d(du^2du)+3d(dud^2u)+d^4u]$

$=e^u(du^4+6du^2d^2u+3d^2u^2+4dud^3u+d^4u)$.

【1178】 $y=\ln u$，求 d^3y.

解 $dy=\frac{1}{u}du$，

$d^2y=-\frac{1}{u^2}du^2+\frac{1}{u}d^2u$，

$d^3y=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{2}{u^2}dud^2u-\frac{1}{u^2}d^2udu+\frac{1}{u}d^3u=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{3}{u^2}dud^2u+\frac{1}{u}d^3u$.

【1179】 视 x 为某个自变量的函数，由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y, d^3y 及 d^4y.

解 $dy=f'(x)dx$,

$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$,

$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dxd^2x+f'(x)d^3x$,

$$d^4y=f^{(4)}(x)dx^4+3f'''(x)dx^2d^2x+3f'''(x)dx^2d^2x+3f''(x)[(d^2x)^2+dxd^3x]$$
$$+f''(x)dxd^3x+f'(x)d^4x$$
$$=f^{(4)}(x)dx^4+6f'''(x)dx^2d^2x+4f''(x)dxd^3x+3f''(x)(d^2x)^2+f'(x)d^4x.$$

【1180】 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导数 y'' 及 y'''，但不假定 x 为自变量.

解 $y'=\dfrac{dy}{dx}$,

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}=\frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y'''=\frac{d\left(\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}\right)}{dx}=\frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

【1181】 证明：函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，满足方程 $y''+y=0$.

证 $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$，$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x=-y$，所以，$y''+y=0$.

【1182】 证明：函数 $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x$，其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，满足方程 $y''-y=0$.

证 $y'=C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x$，$y''=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x=y$，所以，$y''-y=0$.

【1183】 证明：函数 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，λ_1 及 λ_2 为常数，满足方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0.$$

证 $y'=C_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2x}$，$y''=C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}$，于是，

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y$$
$$=C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}-C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}-C_1\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_1x}-C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}-C_2\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_2x}+C_1\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_2x}=0.$$

【1184】 证明：函数 $y=x^n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$，其中 C_1 及 C_2 为任意常数，n 为常数，满足方程

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0.$$

证 $y'=nx^{n-1}[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]+x^{n-1}[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]$,

$y''=x^{n-2}\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]+(2n-1)[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$,

于是，

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y$$
$$=x^n\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]+(2n-1)[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$$
$$+(1-2n)x^n\{n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]+[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$$
$$+(1+n^2)x^n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]=0.$$

【1185】 证明：函数

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 C_1, C_2, C_3 及 C_4 为任意常数，满足方程 $y^{(4)}+y=0$.

证 $$y'=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$
$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_4}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\left(\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt2}+\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt2}+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt2}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt2}+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt2}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt2}-\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt2}-\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)$$

$$=e^{\frac{x}{\sqrt2}}\left(C_2\cos\frac{x}{\sqrt2}-C_1\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\left(C_3\sin\frac{x}{\sqrt2}-C_4\cos\frac{x}{\sqrt2}\right),$$

$$y^{(4)}=(y'')''=e^{\frac{x}{\sqrt2}}\left(-C_1\cos\frac{x}{\sqrt2}-C_2\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\left(-C_3\cos\frac{x}{\sqrt2}-C_4\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)=-y.$$

于是，$y^{(4)}+y=0$.

【1186】 证明：若函数 $f(x)$ 有 n 阶导数，则 $[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$.

证 每求一次导数，均要乘以因子 $(ax+b)'=a$，所以，$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$.

【1187】 若 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，求 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$,

$P''(x)=a_0n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}$,

$\vdots$

$P^{(n)}(x)=n!a_0$.

求 $y^{(n)}$，设：

【1188】 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

提示 $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$，$y''=-\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$. 利用数学归纳法，可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\quad\left(x\neq-\frac{d}{c},\ c\neq0\right).$$

解 $y'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

$y''=-\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$;

利用数学归纳法，可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\quad\left(x\neq-\frac{d}{c},\ c\neq0\right).$$

事实上，对于 $n=2$ 等式成立，设对于 n 等式成立，则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)}=\frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n\cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}=\frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立，于是得证.

【1189】 $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

解 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]\quad(x\neq0,\ x\neq1).$$

【1190】 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

提示 $y=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$.

解 $y=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$.

$$y^{(n)}=(-1)^nn!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\quad(x\neq1,\ x\neq2).$$

【1191】 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $y^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdot(-2)^n(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}=\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\quad\left(x<\frac{1}{2}\right).$

【1192】 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$

提示 $y=\frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

解 $y=\frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

$$y^{(n)}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[2(1+x)+(3n-2)]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}\quad(n\geqslant 2;\ x\neq -1).$$

【1193】 $y=\sin^2 x.$

提示 $y'=\sin 2x$，$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(\sin 2x)^{(n-1)}.$

解 $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$，

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(\sin 2x)^{(n-1)}=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1194】 $y=\cos^2 x.$

提示 仿 1193 题的解法.

解 $y'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$，

$$y^{(n)}=-(\sin 2x)^{(n-1)}=-2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)=2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1195】 $y=\sin^3 x.$

提示 $y=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x.$

解 $y=\sin x\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin x(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos 2x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x.$

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1196】 $y=\cos^3 x.$

提示 $y=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$

解 $y=\cos x\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\cos 2x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1197】 $y=\sin ax\sin bx.$

提示 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x-\frac{1}{2}\cos(a+b)x.$

解 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x-\frac{1}{2}\cos(a+b)x.$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1198】 $y=\cos ax\cos bx.$

提示 仿 1197 题的解法.

解 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x+\frac{1}{2}\cos(a+b)x.$

$$y^{(n)}=\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]+\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1199】 $y=\sin ax\cos bx$.

提示 仿 1197 题的解法.

解 $y=\frac{1}{2}\sin(a+b)x+\frac{1}{2}\sin(a-b)x$.

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]+\frac{1}{2}(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1200】 $y=\sin^2 ax\cos bx$.

提示 $y=\frac{1}{2}\cos bx-\frac{1}{4}\cos(2a+b)x-\frac{1}{4}\cos(2a-b)x$.

解 $y=\frac{1}{2}\cos bx(1-\cos 2ax)=\frac{1}{2}\cos bx-\frac{1}{4}\cos(2a+b)x-\frac{1}{4}\cos(2a-b)x$.

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}b^n\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{1}{4}(2a+b)^n\cos\left[(2a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]-\frac{1}{4}(2a-b)^n\cos\left[(2a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1201】 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

提示 $y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

解 $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1202】 $y=x\cos ax$.

解 $y^{(n)}=x(\cos ax)^{(n)}+n(\cos ax)^{(n-1)}=a^n x\cos\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)+na^{n-1}\cos\left(ax+\frac{n-1}{2}\pi\right)$

$$=a^n x\cos\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1203】 $y=x^2\sin ax$.

解 $y^{(n)}=a^n x^2\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)+2na^{n-1}x\sin\left(ax+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax+\frac{n-2}{2}\pi\right)$

$$=a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)-2na^{n-1}x\cos\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1204】 $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

解 $y^{(n)}=(-1)^n(x^2+2x+2)e^{-x}+2(-1)^{n-1}(x+1)e^{-x}\cdot n+(-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}$

$$=(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)].$$

【1205】 $y=\frac{e^x}{x}$.

解 $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$.

【1206】 $y=e^x\cos x$.

解 $y'=e^x(\cos x-\sin x)=2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$y''=2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2^{\frac{2}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

【1207】$^+$ $y=e^x\sin x$.

提示 仿 1206 题的解法

解 $y'=e^x(\sin x+\cos x)=2^{\frac{1}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$y''=2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2^{\frac{2}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

【1208】 $y=\ln\frac{a+bx}{a-bx}$.

提示 $y'=\frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}$, $y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{b}{a+bx}\right)^{(n-1)}+\left(\frac{b}{a-bx}\right)^{(n-1)}$.

解 $y'=\frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}$,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}b^n(n-1)!}{(a+bx)^n}+\frac{b^n(n-1)!}{(a-bx)^n}$$

$$=\frac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n]\quad\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

【1209】 $y=e^{ax}P(x)$,其中 $P(x)$为多项式.

解 $y^{(n)}=e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)]$.

【1210】 $y=x\operatorname{sh}x$.

解 $y^{(n)}=x(\operatorname{sh}x)^{(n)}+n(\operatorname{sh}x)^{(n-1)}$

$$=\frac{x}{2}[e^x-(-1)^ne^{-x}]+\frac{n}{2}[e^x-(-1)^{n-1}e^{-x}]=\frac{1}{2}[(x+n)e^x-(-1)^n(x-n)e^{-x}]$$

$$=\frac{1}{2}[(x+n)(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)-(-1)^n(x-n)(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)]$$

$$=\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\operatorname{ch}x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\operatorname{sh}x\}.$$

求 d^ny,设:

【1211】 $y=x^ne^x$.

解 $d^ny=y^{(n)}dx^n=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]dx^n$.

【1212】 $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $d^ny=y^{(n)}dx^n=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x+n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]dx^n$

$$=\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]dx^n\quad(x>0).$$

【1213】 证明等式:(1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$

及 (2) $[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$,

其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证明思路 (1)注意到

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]'=e^{ax}[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\ e^{ax}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right]$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\ e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

同法求得$[e^{ax}\sin(bx+c)]''=(a^2+b^2)^{\frac{2}{2}}\ e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi)$,利用数学归纳法,命题即可获证.

(2)仿(1)的证法.

证 (1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]'=e^{ax}[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)]$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $[e^{ax}\sin(bx+c)]''=(a^2+b^2)^{\frac{2}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi)$, …

利用数学归纳法可证得

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi).$$

【1214】 求 $y^{(n)}$,设:

(1) $y=\text{ch}ax\cos bx$; (2) $y=\text{ch}ax\sin bx$; (3) $y=\text{sh}ax\cos bx$; (4) $y=\text{sh}ax\sin bx$.

提示 注意 $\text{ch}ax$ 及 $\text{sh}ax$ 的定义,并利用 1213 题(2)的结果.

解 (1) $y=\dfrac{1}{2}e^{ax}\cos bx+\dfrac{1}{2}e^{-ax}\cos bx$,

利用 1213 题(2)的结果,得

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\cos(bx+n\varphi)+e^{-ax}\cos(bx+n\pi-n\varphi)]$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{e^{ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right.$$

$$\left.+e^{-ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)+\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.-\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\text{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)-\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\text{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right].$$

同样方法可求得:

(2) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\dfrac{n}{2}\pi\right)\text{ch}ax\sin\left(bx+\dfrac{n}{2}\pi\right)+\sin\left(n\varphi-\dfrac{n}{2}\pi\right)\text{sh}ax\cos\left(bx+\dfrac{n}{2}\pi\right)\right]$;

(3) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\sin n\varphi\,\text{ch}ax\sin\left(bx+\dfrac{n}{2}\pi\right)+\cos n\varphi\,\text{sh}ax\cos\left(bx+\dfrac{n}{2}\pi\right)\right]$,

(4) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[-\sin n\varphi\,\text{ch}ax\cos\left(bx+\dfrac{n}{2}\pi\right)+\cos n\varphi\,\text{sh}ax\sin\left(bx+\dfrac{n}{2}\pi\right)\right]$,

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

【1215】 将函数 $f(x)=\sin^{2p}x$,其中 p 为正整数,化为三角多项式:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

提示 令 $t=\cos x+\mathrm{i}\sin x$.

解 设 $t=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,则 $\sin x=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(t-\bar{t})$其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数. 于是,

$$\sin^{2p}x=\frac{1}{(2\mathrm{i})^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}=\frac{1}{(2\mathrm{i})^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^{k}t^{2p-k}(-1)^k\bar{t}^{\,k}$$

$$=(-1)^p\frac{1}{(2i)^{2p}}C_{2p}^p+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^k(-1)^k\cos(2p-2k)x.$$

所以，

$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^k(-1)^k(2p-2k)^n\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1216】 设：(1) $f(x)=\sin^{2p+1}x$； (2) $f(x)=\cos^{2p}x$； (3) $f(x)=\cos^{2p+1}x$，其中 p 为正整数，求 $f^{(n)}(x)$.

提示 仿 1215 题的解法.

解 (1)设 $t=\cos x+i\sin x$，则 $\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$，所以，

$$\sin^{2p+1}x=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^kt^{2p+1-k}(-1)^k\bar{t}^k$$

$$=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^k(-1)^k[\cos(2p+1-2k)x+i\sin(2p+1-2k)x]$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}2^{-2p}C_{2p+1}^k\sin(2p+1-2k)x.$$

所以，

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^k\frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}}\sin\left[(2p+1-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

类似 1215 题及本题(1)的方法，可求得：

(2) $f^{(n)}(x)=(\cos^{2p}x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$；

(3) $f^{(n)}(x)=(\cos^{2p+1}x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}}C_{2p+1}^k\cos\left[(2p+1-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$.

【1217】 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

证明：

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x].$$

提示 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式：

$$x+i=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad x-i=r(\cos\theta-i\sin\theta),$$

其中 $r=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$，$\theta=\operatorname{arccot}x$. 并利用棣莫弗公式.

证 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式：

$$x+i=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad x-i=r(\cos\theta-i\sin\theta).$$

其中 $r=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$，$\theta=\operatorname{arccot}x$.

于是，

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^nn!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^nn!}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^nn!}{2i(x^2+1)^{n+1}}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}]$$

$$=\frac{(-1)^nn!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\{r^{n+1}[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]-r^{n+1}[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)]\theta\}$$

$$=\frac{(-1)^nn!}{(x^2+1)^{n+1}}r^{n+1}\sin(n+1)\theta=\frac{(-1)^nn!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x],$$

所以，$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x]$.

【1218】 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的 n 阶导数.

提示 注意 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 并利用 1217 题的结果.

解 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 利用 1217 题的结果，得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin[n\operatorname{arccot}x]=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right)\quad(x\neq 0).$$

求 $f^{(n)}(0)$，设：

【1219】 (1) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}$； (2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (1) $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right)$.

于是，$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{2^{n+1}n!}{(1-2x)^{n+1}}\right]$. 所以，$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{3}[(-1)^n+2^{n+1}]$.

(2) $f(x)=-\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是，

$$f^{(n)}(x)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}+\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以，

$$f^{(n)}(0)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}+\frac{(2n-1)!!}{2^n}=\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}\quad(n>1).$$

【1220】 (1) $f(x)=x^2e^{ax}$； (2) $f(x)=\arctan x$； (3) $f(x)=\arcsin x$.

提示 (2)利用 1218 题的结果.

(3)先证 $(1-x^2)y''-xy'=0$，再对上式应用莱布尼茨公式.

解 (1) $f^{(n)}(x)=x^2a^ne^{ax}+2nxa^{n-1}e^{ax}+n(n-1)a^{n-2}e^{ax}$， $f^{(n)}(0)=n(n-1)a^{n-2}$；

(2) 利用 1218 题的结果，得 $f^{(2k)}(0)=0$ 及 $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$ $(k=0,1,2,\cdots)$；

(3) $y'=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $y''=f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值，则得

$$y_0'=f'(0)=1,\quad y_0''=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

对上式应用莱布尼茨公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0.$$

在上式中，令 $x=0$，则有

$$y_0^{(n+2)}-n(n-1)y_0^{(n)}-ny_0^{(n)}=0,\quad\text{即}\quad y_0^{(n+2)}=n^2y_0^{(n)}.$$

由于 $y_0''=0$，故

$$y_0^{(2k)}=f^{(2k)}(0)=0\quad(k=0,1,2,\cdots);$$

又由于 $y_0'=1$，故

$$y_0^{(2k+1)}=f^{(2k+1)}(0)=(2k-1)^2y_0^{(2k-1)}=(2k-1)^2(2k-3)^2y_0^{(2k-3)}=\cdots$$
$$=[1\cdot3\cdots(2k-1)]^2=[(2k-1)!!]^2\quad(k=1,2,\cdots).$$

【1221】 (1) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$； (2) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

提示 (1)先证$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$,再对上式应用莱布尼茨公式. (2)同(1).

解 (1)$y'=f'(x)=-\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arcsin x)$,

$$y''=-\frac{m^2}{1-x^2}\cos(m\arcsin x)-\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arcsin x).$$

于是,

$$y_0'=f'(0)=0,\quad y_0''=f''(0)=-m^2,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0.$$

对上式应用莱布尼茨公式,得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}+m^2y^{(n)}=0.$$

令 $x=0$,即得

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y_0'=0$,故 $y_0^{(2k-1)}=f^{(2k-1)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$;又由于$y_0''=-m^2$,故

$$\begin{aligned}y_0^{(2k)}&=f^{2k}(0)=-[m^2-(2k-2)^2]y_0^{2k-2}=\{-[m^2-(2k-2)^2]\}\{-[m^2-(2k-4)^2]\}y_0^{(2k-4)}\\&=\cdots\\&=(-1)^{k-1}[m^2-(2k-2)^2][m^2-(2k-4)^2]\cdots(m^2-2^2)y_0''\\&=(-1)^km^2(m^2-2^2)\cdots[m^2-(2k-2)^2]\quad(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(2) $y'=f'(x)=\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\arcsin x)$,

$$y''=f''(x)=-\frac{m^2}{1-x^2}\sin(m\arcsin x)+\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(m\arcsin x).$$

于是,

$$y_0'=f'(0)=m,\quad y_0''=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0,$$

这与本题(1)所得的方程是一样的,因而也有与(1)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y_0''=0$,故 $y_0^{(2k)}=f^{(2k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$;又由于 $y_0'=m$,故

$$y_0^{(2k+1)}=f^{(2k+1)}(0)=-[m^2-(2k-1)^2]y_0^{(2k-1)}=\cdots=(-1)^km(m^2-1^2)\cdots[m^2-(2k-1)^2]\quad(k=1,2,\cdots).$$

【1222】 (1)$f(x)=(\arctan x)^2$; (2)$f(x)=(\arcsin x)^2$.

提示 (2)先证$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-2=0$,再对上式应用莱布尼茨公式.

解 (1)仍以下标带"0"者表示在 $x=0$ 时的导数值,应用莱布尼茨公式及1220题(2)的结果,即得

$$f^{(2k-1)}(0)=(\arctan x\cdot\arctan x)_0^{(2k-1)}=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

及

$$\begin{aligned}f^{(2k)}(0)&=(\arctan x\arctan x)_0^{(2k)}=\sum_{i=0}^{2k}C_{2k}^i(\arctan x)_0^{(i)}(\arctan x)_0^{(2k-i)}\\&=\sum_{i=0}^{k-1}C_{2k}^{2i+1}(\arctan x)_0^{(2i+1)}(\arctan x)_0^{(2k-2i-1)}\\&=\sum_{i=0}^{k-1}C_{2k}^{2i+1}(-1)^i(2i)!(-1)^{k-i-1}(2k-2i-2)!\\&=(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(2k)!}{(2i+1)!\ (2k-2i-1)!}(2i)!(2k-2i-2)!\end{aligned}$$

$$=(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)}$$

$$=(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2k-2i-1}\right)\right]$$

$$=(-1)^{k-1}2(2k-1)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2(k-i)-1}$$

$$=(-1)^{k-1}2(2k-1)!\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)\quad(k=1,2,\cdots).$$

(2) $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ 或 $\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x$，

对上式两边再求导，得

$$\sqrt{1-x^2}f''(x)-\frac{xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-2=0.$$

应用莱布尼茨公式，得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)=0.$$

在上式中令 $x=0$，即得

$$f^{(n+2)}(0)-n^2f^{(n)}(0)=0.$$

由于 $f'(0)=0$，故

$$f^{(2k-1)}(0)=0\quad(k=1,2,\cdots);$$

又由于 $f''(0)=2$，故

$$f^{(2k)}(0)=(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots2^2f''(0)=2^{(2k-1)}[(k-1)!]^2\quad(k=1,2,\cdots).$$

【1223】 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导数，求 $f^{(n)}(a)$.

提示 由莱布尼茨公式求得 $f^{(n-1)}(x)$，再由导数定义即易得 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n-1)}(x)=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x)+n!(x-a)\varphi(x).$$

于是，$f^{(n-1)}(a)=0$.

按导数定义，即得

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)\varphi'(x)+n!\varphi(x)]$$

$$=n!\varphi(a).$$

【1224】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(n 为正整数)，于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导数，而无 $(n+1)$ 阶导数.

证 由莱布尼茨公式，当 $x\neq0$ 时得

$$f^{(m)}(x)=\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)^{(m)}=\sum_{i=0}^{m}C_m^i(x^{2n})^{(m-i)}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)}.$$

首先指出，有

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)}=\sum_{k=1}^{i-1}\left[a_kx^{-(i+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]+(-x^{-2})^i\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\quad(x\neq0),$$

其中 a_k 是某些常数.现用数学归纳法予以证明：

当 $i=1$ 时,命题显然成立；

设当 $i=N$ 时,命题成立,要证命题对 $i=N+1$ 时也成立.事实上,有

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(N+1)}=\sum_{k=1}^{N-1}a_k\left[x^{-(N+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'+\left[(-x^{-2})^N\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}a_k\left[-(N+k)x^{-(N+1+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)+x^{-(N+k)}(-x^{-2})\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k+1}{2}\pi\right)\right]$$

$$+\left[N(-x^{-2})^{N-1}(2x^{-3})\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N\pi}{2}\right)+(-x^{-2})^{N+1}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{(N+1)-1}\left[b_kx^{-(N+1+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]+(-x^{-2})^{N+1}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right),$$

其中 b_k 是一些适当的常数.于是,命题对于一切正整数均成立.

因而,我们有

$$f^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{(2n)!}{(2n-m+i)!}x^{2n-m+i}\left[\sum_{k=1}^{i-1}a_kx^{-(i+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)+(-x^{-2})^i\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\right]$$

$$(x\neq0).$$

于是,

$$f^{(m)}(x)=(-1)^mx^{2(n-m)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{m\pi}{2}\right)+O(|x|^{2(n-m)+1})\quad(x\to0)\quad(m=1,2,\cdots,n).\qquad(*)$$

由于

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}x^{2n-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$

故由(*)式,得知

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[-x^{2n-3}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)+O(|x|^{2n-2})\right]=0,$$

一直推下去,得

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[(-1)^{n-1}x\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+O(|x|^2)\right]=0.$$

但
$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)+O(1)\right],$$

在 $x=0$ 近旁,$\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)$无界且振荡,故

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)+O(1)\right]$$

不存在,因而 $f^{(n+1)}(0)$不存在.证毕.

【1225】 证明:函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微的.作出此函数的图像.

证 当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出,对于任何正整数 n,均有

$$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\neq0),$$

其中 $P_n(t)$是关于 t 的多项式.现用数学归纳法证明之：

当 $n=1$ 时,命题显然成立；

设当 $n=k$ 时命题成立,即 $f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)$,$P_k(t)$是关于 t 的某多项式.要证命题对于 $n=k+1$ 时也成立.事实上,有

$$f^{(k+1)}(x)=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x^2}}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\left\{2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式.

于是,命题对于一切正整数 n 均成立.

现在,证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微的. 首先,注意到

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(2). 仍用此法,设 $f^{(n)}(0)=0$,则可证明 $f^{(n+1)}(0)=0$. 事实上,有

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{P_n^*\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}=0,$$

($P_n^*(t)=tp^n(t)$ 也是 t 的多项式).

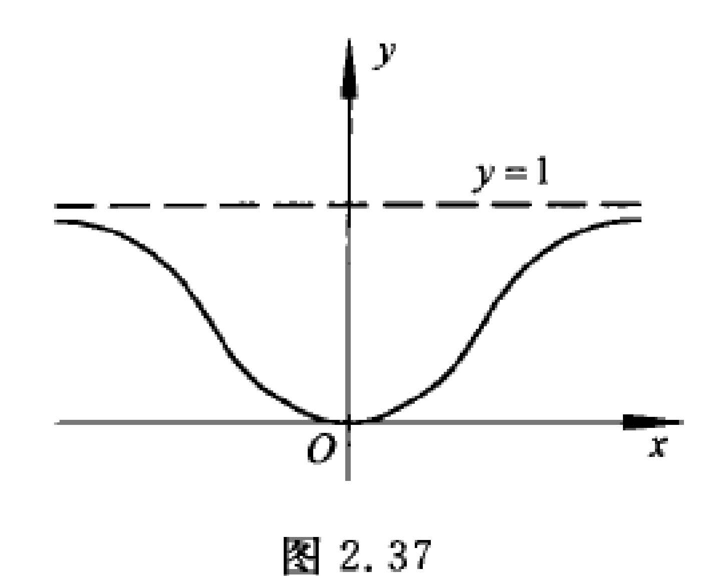


图 2.37

由数学归纳法可知,$f^{(n)}(0)=0$ 对于一切正整数 n 均成立,即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无穷次可微,且其各阶导数为零. 图像如图 2.37 所示.

【1226】 证明:切比雪夫多项式 $T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 满足方程

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

证 $T_m'(x)=\frac{m}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)\quad(|x|<1),$

$$T_m''(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x).$$

于是,

$$(1-x^2)T_m''(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)=-m^2T_m(x)+xT_m'(x),$$

即 $(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0$.

【1227】 证明:勒让德多项式 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 满足方程

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

提示 令 $y=(x^2-1)^m$,可得 $(x^2-1)y'=2mxy$,并利用莱布尼茨公式.

证 设 $y=(x^2-1)^m$,就有

$$y'=2mx(x^2-1)^{m-1}\quad 或\quad (x^2-1)y'=2mxy.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导数,按莱布尼茨公式,即得

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2(m+1)xy^{(m+1)}+m(m+1)y^{(m)}=2mxy^{(m+1)}+2m(m+1)y^{(m)}.$$

于是,$(x^2-1)y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}-m(m+1)y^{(m)}=0$.

两端再以 $\frac{1}{2^m m!}$ 乘之,并以 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}y^{(m)}$ 代入,即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

【1228】 切比雪夫—拉盖尔多项式定义如下:

$$L_m(x)=e^x(x^me^{-x})^{(m)}\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的显式表达式.

证明:$L_m(x)$ 满足方程 $xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=0$.

提示 令 $y=x^me^{-x}$,可得 $xy'+(x-m)y=0$. 并利用莱布尼茨公式.

解 按莱布尼茨公式,有

$$L_m(x)=e^x\{(-1)^mx^me^{-x}+(-1)^{m-1}C_m^1mx^{m-1}e^{-x}+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x}+m!e^{-x}\}$$

$$=(-1)^m x^m+(-1)^{m-1}C_m^1 m x^{m-1}+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!x+m!$$
$$=(-1)^m[x^m-m^2x^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}m^2(m-1)!x+(-1)^m m!]$$

其次，设 $y=x^m\mathrm{e}^{-x}$，就有

$$y'=mx^{m-1}\mathrm{e}^{-x}-x^m\mathrm{e}^{-x},$$

于是，

$$xy'+(x-m)y=0.$$

在上述等式两端各取$(m+1)$阶导数，按莱布尼茨公式，即得

$$xy^{(m+2)}+(m+1)y^{m+1}+(x-m)y^{(m+1)}+(m+1)y^{(m)}=0$$

或

$$xy^{(m+2)}+(1+x)y^{(m+1)}+(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，则由上式可得

$$xz''+(1+x)z'+(m+1)z=0. \tag{1}$$

由于 $L_m(x)=\mathrm{e}^x z$，故

$$L_m'(x)=\mathrm{e}^x(z+z'),\quad L_m''(x)=\mathrm{e}^x(z+2z'+z''),$$

于是，

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=\mathrm{e}^x\{x(z+2z'+z'')+(1-x)(z+z')+mz\}$$
$$=\mathrm{e}^x\{xz''+(x+1)z'+(m+1)z\}. \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，即证得

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=0.$$

【1229】 设 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$，其中 $f(x)$及 $\varphi(x)$为 n 阶可微函数. 证明：

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$与函数 $f(u)$无关.

证 由于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x)$，故命题当 $n=1$ 时成立.

设当 $n=m$ 时命题成立，即有$\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}=\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u)$，要证命题对于 $n=m+1$ 时也成立. 事实上，有

$$\frac{\mathrm{d}^{m+1}y}{\mathrm{d}x^{m+1}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u)=\sum_{k=1}^{m}\{A_k'(x)f^{(k)}(u)+A_k(x)f^{(k+1)}(u)\varphi'(x)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}B_k(x)f^{(k)}(u),$$

其中，$B_1(x)=A_1'(x)$，$B_k(x)=\varphi'(x)A_{k-1}(x)+A_k'(x)$ $(k=2,3,\cdots,m)$，$B_{m+1}(x)=A_m(x)\varphi'(x)$，它们均与 $f(u)$无关.

于是，由数学归纳法得知，$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u)$对于一切正整数 n 均成立.

【1230】 证明：对于复合函数 $y=f(x^2)$的 n 阶导数，成立公式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\cdots.$$

提示 利用数学归纳法.

证 当 $n=1$ 时公式成立，事实上，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xf'(x^2)$.

设当 $n=m$ 时公式成立，要证公式对 $n=m+1$ 时也成立. 事实上，有

$$\frac{\mathrm{d}^{m+1}y}{\mathrm{d}x^{m+1}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}\right)$$
$$=2m(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)+(2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)+\frac{m(m-1)}{1!}2(m-2)(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)$$

$$+\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}2(m-4)(2x)^{m-5}f^{(m-2)}(x^2)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)+\cdots$$

$$=(2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)+\left[2m+\frac{m(m-1)}{1!}\right](2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$

$$+\left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\right](2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)+\cdots$$

$$=(2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)+\frac{(m+1)m}{1!}(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$

$$+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!}(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)+\cdots$$

这正是公式对于 $n=m+1$ 时的情形．于是，由数学归纳法得知，公式对于一切正整数 n 均成立．

【1231】 切比雪夫—埃尔米特多项式定义如下：

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)}\quad (m=0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的显式表达式．

证明：$H_m(x)$ 满足方程 $H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0$.

解 设 $y=e^{-x^2}$，则有

$$y'=(-2x)e^{-x^2}=(-1)^1(2x)^1e^{-x^2},$$

$$y''=e^{-x^2}[(-2x)^2-2]=[(-1)^2(2x)^2-2]e^{-x^2}.$$

一般地，可用数学归纳法证明

$$y^{(m)}=\left[(-1)^m(2x)^m+(-1)^{m-1}\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}\right.$$

$$\left.+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}+\cdots\right]e^{-x^2}.$$

于是，得

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}y^{(m)}=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\cdots.$$

又 $y'+2xy=0$.

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导数，按莱布尼茨公式，即得

$$y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}+2(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，上式就是

$$z''+2xz'+2(m+1)z=0. \tag{1}$$

由 $H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}z$，得

$$H'_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(2xz+z'),$$

$$H''_m(x)=(-1)^m e^{x^2}[(4x^2+2)z+4xz'+z''].$$

从而有

$$H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=(-1)^m e^{x^2}\{(4x^2+2)z+4xz'+z''-4x^2z-2xz'+2mz\}$$

$$=(-1)^m e^{x^2}\{z''+2xz'+2(m+1)z\}. \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，即证得 $H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0$.

【1232】 证明等式：$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

证 当 $n=1$ 时，由于 $(e^{\frac{1}{x}})'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，故等式成立．

设当 $n=k$ 时等式成立，即有 $(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$，要证等式对 $n=k+1$ 时也成立．事实上，有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=[(x\cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'=[x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}+k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'$$

$$=x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}+(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}+k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$=x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]'+(k+1)\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

于是，由数学归纳法得知，$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$ 对于一切正整数 n 均成立.

【1233】 设 $\frac{d}{dx}=D$ 表示微分算子，$f(D)=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k$ 为微分符号的多项式，其中 $p_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为 x 的某连续函数. 证明：

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼茨公式，有

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=[e^{\lambda x}u(x)]^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(e^{\lambda x})^{(i)}u^{(k-i)}(x)=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{k-i}(x).$$

另一方面，有

$$(D+\lambda)^k u(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i D^{(k-i)}u(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而，得

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

于是，

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}p_k(x)(D+\lambda)^k u(x)=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

即 $f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x)$.

【1234】 证明：若在方程 $\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\frac{d^k y}{dx^k}=0$ 中令 $x=e^t$，其中 t 为自变量，此方程化为

$$\sum_{k=0}^{n}a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y=0,$$

其中 $D=\frac{d}{dt}$.

证明思路 记 $\delta=\frac{d}{dx}$，则有

$$Dy=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=e^t\delta y \quad 或 \quad \delta y=e^{-t}Dy.$$

从而，对于符号 D 及 δ 有关系：$\delta=e^{-t}D$. 继续求得

$$\delta^2 y=\delta(\delta y)=e^{-t}D(\delta y)=e^{-t}D[e^{-t}Dy]=e^{-t}[-e^{-t}Dy+e^{-t}D^2y]=e^{-2t}D(D-1)y,$$

利用数学归纳法可证得

$$\delta^{(k)}y=e^{-kt}D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad (k\in\mathbf{N})$$

从而，命题易获证.

证 记 $\delta=\frac{d}{dx}$，则有

$$Dy=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=e^t\delta y \quad 或 \quad \delta y=e^{-t}Dy.$$

从而，对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta=e^{-t}D.$$

继续求得

$$\delta^2 y = e^{-t}D[e^{-t}Dy] = e^{-t}[-e^{-t}Dy + e^{-t}D^2 y] = e^{-2t}D(D-1)y,$$

一般地,可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt}D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \tag{1}$$

事实上,设公式(1)对 $k=m$ 时成立,则有

$$\begin{aligned}\delta^{(m+1)} y = \delta(\delta^{(m)} y) &= e^{-t}D[e^{-mt}D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t}[-me^{-mt}D(D-1)\cdots(D-m+1)y + e^{-mt}D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t}D(D-1)\cdots[D-(m+1)+1]y,\end{aligned}$$

即公式(1)对于 $k=m+1$ 时也成立. 于是,公式(1)对于一切正整数均成立.

于是,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \delta^{(k)} y = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kt} \cdot e^{-kt}D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0.$

§6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

1° **罗尔定理** 若函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在此区间内有有限的导数 $f'(x)$;(3)$f(a)=f(b)$,则在区间(a,b)内至少存在一个数 c,使

$$f'(c)=0.$$

2° **拉格朗日定理** 若函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在区间(a,b)内有有限的导数 $f'(x)$,则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \quad 其中\ a<c<b$$

(有限增量公式).

3° **柯西定理** 若函数 $f(x)$及 $g(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在(a,b)内 $f(x)$及 $g(x)$有有限的导数 $f'(x)$及$g'(x)$;(3)当 $a<x<b$,$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$;(4)$g(a)\neq g(b)$,则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(d)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a<c<b$.

【1235】 检验罗尔定理对于函数

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

的正确性.

提示 除了检验 $f(x)$满足罗尔定理的条件外,还必须检验使 $f'(c)=0$ 中的 c 的存在性,这样,才算完成了检验的目的.

解 (1) 函数 $f(x)$在$[1,2]$及$[2,3]$上连续;

(2) $f'(x)$在$(1,2)$及$(2,3)$上处处存在;

(3) $f(1)=f(2)=0$ 及 $f(2)=f(3)=0$.

由罗尔定理,应该有 $1<c_1<2$, $2<c_2<3$ 存在,使 $f'(c_1)=0$, $f'(c_2)=0$. 下面,我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$f'(x) = (x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2) = 3x^2-12x+11.$$

令 $f'(x)=0$ 解之,得 $x=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,故可取

$$c_1 = 2-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad c_2 = 2+\frac{\sqrt{3}}{3};$$

显然 $1<c_1<2$, $2<c_2<3$, 且 $f'(c_1)=0$, $f'(c_2)=0$.

【1236】 函数

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

当 $x_1=-1$ 及 $x_2=1$ 时为零,但是当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f'(x)\neq 0$. 说明与罗尔定理表面上的矛盾.

提示 原因是 $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 在 $x=0$ 处不存在,不满足罗尔定理的第二个条件. 因此,当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,可以有 $f'(x)\neq 0$.

解 $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$,它在 $[-1,1]$ 上恒不为零,表面上看是与罗尔定理矛盾的. 实际上不然,原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在,不满足罗尔定理的第二个条件,故当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,可以有 $f'(x)\neq 0$.

【1237】 设函数 $f(x)$ 在有限的或无穷的区间 (a,b) 中的任意一点有有限的导数 $f'(x)$,且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

证明: $f'(c)=0$,其中 c 为区间 (a,b) 中的某点.

证明思路 当 (a,b) 为有限区间时,可令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b), \\ A, & x=a \text{ 与 } b. \end{cases}$$

其中 $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

然后对 $F(x)$ 使用罗尔定理. 当 (a,b) 为无穷区间时,

(1) 若 $a=-\infty$, $b=+\infty$,可令 $x=\tan t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$,对复合函数 $g(t)=f(\tan t)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内仿前讨论.

(2) 若 a 为有限数, $b=+\infty$,则可取 $b_0>\max(a,0)$,令 $x=\dfrac{(b_0-a)t}{b_0-t}$,对 $g(t)=f\left(\dfrac{(b_0-a)t}{b_0-t}\right)$ 在 (a,b_0) 内仿前讨论.

(3) 当 $a=-\infty$, b 为有限数,类似地讨论.

证 当 (a,b) 为有限区间时,设

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b), \\ A, & x=a \text{ 与 } b \end{cases}$$

其中 $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且有 $F(a)=F(b)$. 故由罗尔定理可知,在 (a,b) 内至少存在一点 c,使 $F'(c)=0$. 而在 (a,b) 内, $F'(x)=f'(x)$,所以, $f'(c)=0$.

下设 (a,b) 为无穷区间. 若 $a=-\infty$, $b=+\infty$,可设

$$x=\tan t \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x=\tan t$ 组成的复合函数 $g(t)=f(\tan t)$ 在有限区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内仿前讨论可知:至少存在一点 $t_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,使

$$g'(t_0)=f'(c)\cdot\sec^2 t_0=0,$$

其中 $c=\tan t_0$. 由于 $\sec^2 t_0\neq 0$,故 $f'(c)=0$.

若 a 为有限数, $b=+\infty$ 则可取 $b_0>\max\{a,0\}$,而令

$$x=\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}.$$

于是,对复合函数 $g(t)=f\left(\dfrac{(b_0-a)t}{b_0-t}\right)$ 在有限区间 (a,b_0) 上仿前讨论,可知:存在 $t_0\in(a,b_0)$ 使

$$g'(t_0)=f'(c)\cdot\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}=0,$$

其中 $c=\frac{(b_0-a)t_0}{b_0-t_0}$. 显然 $a<c<+\infty$. 由于 $\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}>0$, 故 $f'(c)=0$.

对于 $a=-\infty$, b 为有限数的情形,可类似地进行讨论. 证毕.

【1238】 设函数 $f(x)$:(1)在闭区间 $[x_0,x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$;(2)在区间 (x_0,x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$;(3)下面的等式成立:

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad(x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明:在区间 (x_0,x_n) 内至少存在一点 ξ,使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

提示 累次应用罗尔定理.

证 在每一个闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

上,函数 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件. 因此,存在 n 个点

$$x_1',x_2',\cdots,x_k',\cdots,x_n',$$

其中 $x_k'\in(x_{k-1},x_k)(k=1,2,\cdots,n)$,使

$$f'(x_k')=0\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

于是,在每个区间 $[x_k',x_{k+1}'](k=1,2,\cdots,n-1)$ 上,函数 $f'(x)$ 满足罗尔定理的条件. 因此存在点 x_k'' 属于 (x_k',x_{k+1}') $(k=1,2,\cdots,n-1)$,使

$$f''(x_k'')=0\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

继续上述步骤,经 $(n-1)$ 次后,得出一个区间 $[x_1^{n-1},x_2^{n-1}]\subset(x_0,x_n)$,满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1})=0(k=1,2)$. 于是在此区间上,函数 $f^{n-1}(x)$ 满足罗尔定理的条件. 所以,至少存在一点 $\xi\in(x_1^{n-1},x_2^{n-1})$,使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

【1239】 设函数 $f(x)$: (1)在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且有 $(p+q)$ 阶的连续导数 $f^{(p+q)}(x)$; (2)在区间 (a,b) 内有 $(p+q+1)$ 阶的导数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3)下面的等式成立:

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(p)}(a)=0,\quad f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(q)}(b)=0.$$

证明:在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c)=0,$$

其中 c 为区间 (a,b) 内的某点.

证 若 $p=q$.

在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件,因此,至少存在一点 $x_1^{(1)}\in(a,b)$,使 $f'(x_1^{(1)})=0$;

对于区间 $[a,x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)},b]$,函数 $f'(x)$ 在其上满足罗尔定理的条件,因此,至少分别存在 $x_2^{(1)},x_2^{(2)}$,使

$$f''(x_2^{(1)})=0,\quad f''(x_2^{(2)})=0;\quad\cdots$$

继续上述步骤,经过 p 次后,得出 $(p+2)$ 个点: $a,x_p^{(1)},x_p^{(2)},x_p^{(3)},\cdots,x_p^{(p)},b$ 使

$$f^{(p)}(a)=f^{(p)}(x_p^{(k)})=f^{(p)}(b)=0\quad(k=1,2,\cdots,p);$$

由此 $(p+2)$ 个点组成 $(p+1)$ 个区间,仿 1238 题对于它们重复使用罗尔定理 p 次,即可得出点 c 属于 (a,b),使

$$f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

若 $p\neq q$,不失一般性,设 $q=p+k$ (k 为某正整数).

当进行 $(p+1)$ 次后,对于函数 $f^{(p)}(x)=0$ 而言,在 (a,b) 内有 $(p+1)$ 个点: ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{p+1},满足

$$f^{(p+1)}(\xi_k)=0\quad(k=1,2,\cdots,p+1);$$

再加上条件 $f^{(p+1)}(b)=f^{(p+2)}(b)=\cdots=f^{(p+k)}(b)=0$,重复对此再应用罗尔定理 k 次,则在 (a,b) 内仍然存在 $(p+1)$ 个点: $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$, $\cdots$, $\xi_{p+1}^{(k)}$,使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)})=0\quad(j=1,2,\cdots,p+1).$$

以后,每进行一次,减少一个点,进行 p 次后,即可得出 $c\in(a,b)$,使

$$f^{(p+k+p+1)}(c)=0, \quad 即 \quad f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

证毕.

【1240】 证明：若具实系数 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$ 的多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$$

之一切根为实数，则其逐次的导数 $P_n'(x),P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

证 根据假设，此处 n 次多项式 $P_n(x)$ 有 n 个实根. 记其诸实根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$，并且 α_i 是 k_i 重根，$k_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,l)$，有 $k_1+k_2+\cdots+k_l=n$. 于是，可改写 $P_n(x)$ 为

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_l)^{k_l}$$

显见 α_i 为 $P_n'(x)$ 的 k_i-1 重根$(i=1,2,\cdots,l)$. 由 $P_n(\alpha_1)=P_n(\alpha_2)=\cdots=P_n(\alpha_l)=0$，$P_n(x)$ 可微，据罗尔定理，存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$，而 $\xi_i\in(\alpha_i,\alpha_{i+1})$，使 $P_n'(\xi_i)=0(i=1,2,\cdots,l-1)$. 于是，有

$P_n'(x)$ 的根	$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$	α_1	α_2	$\cdots$	α_l
重　数	单　根	k_1-1	k_2-1	$\cdots$	k_l-1

即 $n-1$ 次多项式 $P_n'(x)$ 的根恰有 $(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_l-1)+(l-1)=k_1+k_2+\cdots+k_l-1=n-1$ 个，这就是说，一个 n 次多项式，若 n 个根均为实根的话，则其导数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根. 反复运用这一结果. 由 $P_n'(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根，便可推知 $P_n''(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根. 如此下去，即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导数——直至 $P^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

【1241】 证明：勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间$(-1,1)$中.

证 显然，$2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$ 仅有实根（-1 是 n 重根，1 也是 n 重根）. 因此，根据 1240 题的结果知 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}Q_{2n}(x)$ 仅有实根，且都含于$[-1,1]$中. 但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根$\Big($因为，例如，-1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根，故 -1 是 $\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根，因而 -1 不是 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}Q_{2n}(x)$ 的根$\Big)$. 因此，$P_n(x)$ 的根全部位于$(-1,1)$中. 证毕.

【1242】 证明：切比雪夫—拉盖尔多项式 $L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$ 所有的根都是正数.

证 令 $Q(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}$，易知

$$Q^{(m)}(x)=\mathrm{e}^{-x}[(-1)^m x^n+(-1)^{m-1}C_m^1 nx^{n-1}+\cdots+(-1)C_m^{m-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)x^{n-m+1}$$
$$+n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}] \quad (m=1,2,\cdots,n).$$

显然 $Q^{(m)}(0)=0$ $\Big(m=0,1,\cdots,n-1$；为方便计，以下记 $Q^{(0)}(x)=Q(x)\Big)$，但 $Q^{(n)}(0)=n!\neq 0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty}Q^{(m)}(x)=0 \quad (m=0,1,\cdots,n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间$(0,+\infty)$应用 1237 题，知存在 $\xi^{(1)}\in(0,+\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)})=0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0,\xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)},+\infty)$ 应用 1237 题，知存在 $\xi_1^{(2)}\in(0,\xi^{(1)})$，$\xi_2^{(2)}\in(\xi^{(1)},+\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)})=0 \quad (i=1,2).$$

这样继续下去，反复应用 1237 题 n 次，知存在 $0<\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\cdots<\xi_n^{(n)}<+\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)})=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)})=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故 $\xi_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$L_n(x)=\mathrm{e}^xQ^{(n)}(x)=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}C_n^1 nx^{n-1}+\cdots+(-1)C_n^{n-1}n!x+n!$$

是 x 的 n 次多项式，故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根（实的或复的），因此 $\xi_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根. 证毕.

【1243】 证明：切比雪夫—埃尔米特多项式 $H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ 所有的根都是实数.

证 设 $Q(x)=e^{-x^2}$，显然有

$$Q'(x)=-2xe^{-x^2},\quad Q''(x)=2e^{-x^2}(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1),$$

从而得知 $Q'(x)=0$ 有一个实根，$Q''(x)=0$ 有两个相异的实根.

设 $Q^{(k)}(x)=0$ 有 k 个相异实根，并记成 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k$，注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积，从而就有

$$Q^{(k)}(x)=Ae^{-x^2}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k),$$

其中 $A\neq0$ 为某个常数. 下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $k+1$ 个相异实根. 事实上，由

$$Q^{(k)}(\alpha_i)=Q^{(k)}(\alpha_{i+1})\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$$

应用罗尔定理得知，存在 $\beta_i\in(\alpha_i,\alpha_{i+1})$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,k-1).$$

又由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}Q^{(k)}(x)=0$ 及 $Q^{(k)}(\alpha_1)=0$，利用 1237 题的结果，故知存在 $\beta_0\in(-\infty,\alpha_1)$，使 $Q^{(k+1)}(\beta_0)=0$.

同法可知，存在 $\beta_k\in(\alpha_k,+\infty)$，使 $Q^{(k+1)}(\beta_k)=0$.

于是，$Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $k+1$ 个实根. 故由数学归纳法知，$Q^{(n)}(x)=0$ 有 n 个相异实根（$n=1,2,\cdots$），从而，$H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根（实的或复的）. 因此，$H_n(x)$ 所有的根都是实数. 证毕.

【1244】 在曲线 $y=x^3$ 上某点的切线，平行于连接点 $A(-1,-1)$ 及点 $B(2,8)$ 所成的弦，求出此点.

提示 设所求的点为 (x_0,y_0)，由题设可得 $3x_0^2=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}=3$.

解 由题设知 $y=x^3$ 在所求点 (x_0,y_0) 的切线斜率应为 $y'(x_0)=3x_0^2=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}=3$. 于是，

$$x_0=-1,\quad 或\quad x_0=1,$$

故所求的点为 $A(-1,-1)$ 及 $C(1,1)$.

【1245】 若 $ab<0$，有限增量公式对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是否正确？

提示 不正确. 否则会产生矛盾.

解 不正确. 事实上，如果有限增量公式在此成立，则有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b),$$

即

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\xi^2}(b-a)=\frac{a-b}{\xi^2}.$$

但是 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$. 所以 $\frac{a-b}{\xi^2}=\frac{a-b}{ab}$，即有 $\xi^2=ab<0$，这样产生矛盾. 因此，有限增量公式对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$（$ab<0$）上不正确. 原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在，故有限增量公式的条件不满足.

【1246】 设：

(1) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$； (2) $f(x)=x^3$$^+$； (3) $f(x)=\frac{1}{x}$$^+$； (4) $f(x)=e^x$.

求满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta xf'(x+\theta\Delta x)\quad(0<\theta<1)$ 的函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$.

解 (1) $f'(x)=2ax+b$. 于是，有

$$a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-ax^2-bx-c=\Delta x[2a(x+\theta\Delta x)+b].$$

化简之，得 $\theta=\frac{1}{2}$.

(2) $f'(x)=3x^2$. 于是，有

$$(x+\Delta x)^3-x^3=3\Delta x(x+\theta\Delta x)^2.$$

如果 $x=0$，则 $\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$；如果 $x\neq0$，化简整理得

$$3\theta^2\Delta x+6\theta x-(3x+\Delta x)=0,$$

从而有

$$\theta=\frac{\pm\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x}{\Delta x}.$$

其中正负号的取法由 x 及 Δx 的符号及条件 $0<\theta<1$ 决定. 例如,当 $x\geqslant 0$, $\Delta x>0$ 时,根式前应取正号.

(3) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. 于是,有

$$\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^2}.$$

化简之,得

$$\theta^2(\Delta x)^2+2x\theta\Delta x-x\Delta x=0,\quad 或\quad \theta^2+2\frac{x}{\Delta x}\theta-\frac{x}{\Delta x}=0,$$

故 $\theta=\frac{x}{\Delta x}\left(\pm\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)$. 此处取正负号要视确保 $\theta\in(0,1)$ 而定,且应有 $\frac{\Delta x}{x}>-1\quad(x\neq 0)$.

(4) $f'(x)=e^x$. 于是,有

$$e^{x+\Delta x}-e^x=\Delta x e^{x+\theta\Delta x},\quad \theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

可以验证 $\theta\in(0,1)$.

【1247】 证明:若 $x\geqslant 0$,则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$,并且 $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant 0$ 时,对函数 $\sqrt{x}$ 施用有限增量公式,即得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之,得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x].$$

当 $x=0$ 时, $\theta=\frac{1}{4}$. 当 $x>0$ 时,有

$$0\leqslant\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

于是,

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4},\quad \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}+\frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)}+x]}\right\}=\frac{1}{2}.$$

【1248】 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

在闭区间[0,2]上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c.

解 $f(0)=\frac{3}{2}$, $f(2)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{x^2}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

按题设有

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-c(2-0) \quad 或 \quad \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以，$c=\frac{1}{2}$或 $c=\sqrt{2}$（$-\sqrt{2}$不适合），此即所求的中间值 c.

【1249】 设 $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$，其中 $0<\xi(x)<x$.

证明：若

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(\ln x), & x>0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

则函数 $\xi=\xi(x)$ 在任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ 内 $(\varepsilon>0)$ 是不连续的.

提示 用反证法即可获证.

证 用反证法. 假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0,\varepsilon)$ 内连续 $(\varepsilon>0)$. 由于当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right),$$

故由 $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$ 得

$$x\sin(\ln x)=x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),$$

从而，

$$\sin(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right), \quad 0<x<+\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N，使

$$-2N\pi+\frac{\pi}{4}<\ln\xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0<\xi(x)<x$ 知 $\lim\limits_{x\to 0+0}\xi(x)=0$，从而，

$$\lim_{x\to 0+0}\ln\xi(x)=-\infty.$$

因此，可取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$，使

$$\ln\xi(\delta)<-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln\xi(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续，根据中间值定理，必有 $x_0\in\left(\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 存在，使

$$\ln\xi(x_0)=-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

于是，$1\geqslant\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x_0)\right)=\sqrt{2}$，这是不可能的. 证毕.

【1250】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有连续的导数 $f'(x)$. 对于区间 (a,b) 内任何一点 ξ，可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \quad (x_1<\xi<x_2)?$$

提示 研究函数 $f(x)=x^3(-1<x<1)$，它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 及 x_2.

解 一般地说，不可以. 例如，研究函数

$$f(x)=x^3 \quad (-1<x<1),$$

它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

事实上，$f'(\xi)=3\xi^2=0$，而当 $x_1<0<x_2$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1x_2+x_1^2=x_2^2+x_1^2-|x_1||x_2|>x_2^2+x_1^2-2|x_1||x_2|$$

$=(|x_1|-|x_2|)^2>0.$

【1251】 证明下列不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$；

(2) $py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$ *) $(0<y<x,p>1)$；

(3) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(4) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，设 $0<b<a$.

证 (1) $|\sin x-\sin y|=|(x-y)\cos\xi|\leqslant|x-y|$（$\xi$ 在 x,y 之间）.

(2) $x^p-y^p=p(x-y)\xi^{p-1}$，其中 $0<y<\xi<x$. 由于 $p>1$，所以，$y^{p-1}<\xi^{p-1}<x^{p-1}$. 于是，$py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$.

*) 原题的不等式中的等号可以去掉.

(3) $|\arctan a-\arctan b|=\left|\frac{a-b}{1+\xi^2}\right|\leqslant|a-b|$.

(4) $\ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}$，其中 $0<b<\xi<a$. 于是，$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

【1252】 说明在闭区间 $[-1,1]$ 上柯西定理对于函数 $f(x)=x^2$ 及 $g(x)=x^3$ 何以不真？

提示 注意当 $x=0$ 时，$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=0$.

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上虽有连续的导数，且 $g(-1)\neq g(1)$，但是，当 $x=0$ 时，

$$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=4x^2+9x^4=0,$$

因此，对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足柯西定理的条件，所以结论可以不真. 事实上，

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}\neq 0,\quad \xi\in(-1,1),\quad \xi\neq 0,$$

它们是不相等的.

【1253】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上可微，并且 $x_1x_2>0$，证明：

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中 $x_1<\xi<x_2$.

证明思路 令 $g(x)=\frac{1}{x}$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，注意由于 $x_1x_2>0$，故 $x=0$ 在 $[x_1,x_2]$ 之外. 对于 $F(x)$ 和 $g(x)$ 应用柯西定理.

证 设 $g(x)=\frac{1}{x}$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，由于 $x_1x_2>0$，故 $x=0$ 在 $[x_1,x_2]$ 之外. 从而，$g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1,x_2]$ 上可微，且有

$$[g'(x)]^2+[F'(x)]^2=\frac{1}{x^4}\{1+[xf'(x)-f(x)]^2\}\neq 0 \quad 及 \quad g(x_1)\neq g(x_2).$$

因此，对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足柯西定理的条件，故在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使有

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},\quad 即\quad \frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理，即得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

【1254】 证明：若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 内可微，但无界，则其导数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内也无

界.逆定理不真(举出例子).

提示 用反证法及拉格朗日定理.其逆不真,例如,$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $(0<x<\frac{1}{2})$.

证 在开区间(a,b)内,由于导数存在,因此,$f(x)$在(a,b)内连续.

现在假定$|f'(x)|<N$ $(a<x<b)$,即$f'(x)$是有界的.取定$c\in(a,b)$,则按有限增量公式可知,对任何$a<x<b$,均有

$$|f(x)-f(c)|=|x-c|\,|f'(\xi)|<N(b-a).$$

其中ξ在c与x之间,从而属于(a,b).

因为$|f(x)-f(c)|\geqslant|f(x)|-|f(c)|$,所以,$|f(x)|<|f(c)|+N(b-a)$.此与$f(x)$是无界的条件相矛盾,所以$f'(x)$是无界的.

反之不一定正确.例如,函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内有界,但其导数却是无界的.

注意 在无限区间内无界的函数的导数可能有界.例如,函数$f(x)=\ln x$在$(1,+\infty)$内无界,但其导数$f'(x)=\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内却是有界的.

【1255】 证明:若函数$f(x)$在有限或无穷的区间(a,b)内有有界的导数$f'(x)$,则$f(x)$在(a,b)中一致连续.

提示 利用拉格朗日定理.

证 设当$x\in(a,b)$时,$|f'(x)|\leqslant M$.对于任给的$\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$,则当$x_1,x_2\in(a,b)$且$|x_1-x_2|<\delta$时,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\,|f'(\xi)|\leqslant M|x_1-x_2|<\varepsilon,\quad(\xi\text{在}x_1\text{与}x_2\text{之间}),$$

于是,$f(x)$在(a,b)内一致连续.

【1256】 证明:若函数$f(x)$在无穷的区间$(x_0,+\infty)$内可微,且

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0,\quad\text{则}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即:当$x\to+\infty$时,$f(x)=o(x)$.

证 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,故对任给的$\varepsilon>0$,存在$X_1>0$,使当$x>X_1$时,恒有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今在$(X_1,+\infty)$内任取一点a,则当$x>a$时,由有限增量公式可得

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|\,|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

由于

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|,$$

所以,

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

再取$X_2>a$,使$\frac{|f(a)|}{X_2}<\frac{\varepsilon}{2}$,则当$x>X_2$时,恒有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|f(a)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|x-a|}{x}<\frac{|f(a)|}{X_2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,即:当$x\to+\infty$时,$f(x)=o(x)$.

【1257】 证明:若函数$f(x)$在无穷的区间$(x_0,+\infty)$内可微,且当$x\to+\infty$时,$f(x)=o(x)$,则

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

证 由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 易得对于任意常数 $a>x_0$，均有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{f(a)}{x-a}\right]=0.$$

于是，对于 $\epsilon_n=\frac{1}{n}$，$a_n=\max\{n,x_0+1\}$ $(n=1,2,\cdots)$，总存在 $b_n>a_n$，使

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|<\epsilon_n.$$

由拉格朗日定理知，存在 x_n：$a_n<x_n<b_n$，使得

$$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n},\quad 即\quad |f'(x_n)|<\epsilon_n\quad (n=1,2,\cdots).$$

从而，$\lim\limits_{n\to+\infty}|f'(x_n)|=0$. 由于 $x_n>a_n\geqslant n$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 由此可知 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

【1258】 (1) 证明：若函数 $f(x)$：(ⅰ)在闭区间 $[x_0,X]$ 上有定义并且是连续的；(ⅱ)在区间 (x_0,X) 内有有限的导数 $f'(x)$；(ⅲ)存在有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to x_0+0}f'(x)=f'(x_0+0),$$

则相应地存在有限或无穷的单侧导数 $f'_+(x_0)$ 且 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$.

(2) 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1+x}{1-x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 存在有限的极限 $\lim\limits_{x\to1}f'(x)$，但是函数 $f(x)$ 没有单侧的导数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$.

给出这个事实的几何解释.

证 (1) 由有限增量公式，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x)\quad (0<\theta<1),$$

当 $\Delta x\to+0$ 时，$x_0+\theta\Delta x\to x_0+0$.

由假设条件知 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}f'(x_0+\theta\Delta x)=f'(x_0+0)$，所以有

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta_0}=f'(x_0+0),$$

即 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$，

(2) 当 $x\neq1$ 时，
$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是，
$$\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

但是，
$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\arctan\frac{1+x}{1-x}}{x-1}=-\infty$$

及
$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{\arctan\frac{1+x}{1-x}}{x-1}=-\infty,$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y=f(x)$ 的图像如图 2.38 所示.

当 $x\to1-0$ 时，$f(x)\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to1+0$ 时，$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$.

图 2.38

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点，即在 $x=1$ 处 $f(x)$ 产生突跃，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无导数.

【1259】 证明：若当 $a<x<b$ 时，$f'(x)=0$，则当 $a<x<b$ 时，$f(x)=$ 常数.

提示 *在 (a,b) 内取一定点 x_0，当 $a<x<b$ 时，利用拉格朗日定理及题设条件，命题易获证.*

证 在 (a,b) 内取一定点 x_0，则当 $a<x<b$ 时，按有限增量公式可得

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间.由于 $f'(c)=0$,故 $f(x)-f(x_0)=0$,即 $f(x)=f(x_0)=$常数.

【1260】 证明:导数为常数 $f'(x)=k$ 的唯一函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$是线性函数 $f(x)=kx+b$.

证明思路 注意到$[f(x)-kx]'=f'(x)-k=0$,利用 1259 题的结果,命题易获证.

证 $[f(x)-kx]'=f'(x)-k=k-k=0$,于是,利用 1259 题的结果,即知

$$f(x)-kx=b \quad (b\text{ 为常数}),$$

故 $f(x)$必为线性函数: $f(x)=kx+b$. 证毕.

【1261】 若 $f^{(n)}(x)=0$,则函数 $f(x)$有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x)=0$,于是,$f^{(n-1)}(x)=c$(c 为常数).再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x)=cx+b.$$

假设

$$f^{(k)}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x)=f^{(k-1)}(x)-\left(a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots+\frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k}\right),$$

则有 $\Phi'(x)=f^{(k)}(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-k-1}x^{n-k-1})=0.$

由 1259 题知 $\Phi(x)=b_0$,并记 $a_0=b_1,\frac{1}{2}a_1=b_2,\cdots,\frac{1}{n-k}a_{n-k-1}=b_{n-k}$,则有

$$f^{(k-1)}(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-k}x^{n-k}.$$

依数学归纳法便有

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式,其中 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$是任意常数.

【1262】 证明:满足方程 $y'=\lambda y$ ($\lambda=$常数)的唯一函数 $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$是指数函数 $y=Ce^{\lambda x}$,其中 C 为任意常数.

证明思路 注意到$(ye^{-\lambda x})'=y'e^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}=\lambda ye^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}=0$,利用 1259 题的结果,命题易获证.

证 $(ye^{-\lambda x})'=y'e^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}=\lambda ye^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}=0$,于是,$ye^{-\lambda x}=C$ (C 为常数),即 $y=Ce^{\lambda x}$.

【1263】 检验函数

$$f(x)=\arctan\frac{x+a}{1-ax},\quad g(x)=\arctan x$$

在区间:(1) $ax<1$ 及 (2) $ax>1$ 内有相同的导数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax<1$ 或 $ax>1$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2}\cdot\frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}=\frac{1}{1+x^2},\quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

故有 $f'(x)=g'(x)$ $(ax<1$ 或 $ax>1)$.因此,

$$\text{当 } ax<1 \text{ 时},\quad f(x)-g(x)=C_1, \tag{1}$$

$$\text{当 } ax>1 \text{ 时},\quad f(x)-g(x)=C_2, \tag{2}$$

下面确定常数 C_1 与 C_2.设 $a>0$ ($a<0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x\to-\infty$,得$-\arctan\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}=C_1$,故 $C_1=\arctan a$.因此,

$$\arctan\frac{x+a}{1-ax}-\arctan x=\arctan a\quad(ax<1).$$

在(2)中令 $x\to+\infty$,得$-\arctan\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}=C_2$,故 $C_2=\arctan a-\pi$.因此,

$$\arctan\frac{x+a}{1-ax}-\arctan x=\arctan a-\pi\qquad(ax>1).$$

【1264】 证明下列恒等式：

(1) $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$，当 $|x|\geqslant 1$；

(2) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$，当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

证 (1) 当 $|x|>1$ 时，由于

$$\left(2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0,$$

故 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C_1$，当 $x>1$ 时； $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C_2$，当 $x<-1$ 时.

下面确定常数 C_1 与 C_2. 令 $x=\sqrt{3}$，代入前一式，得 $C_1=\pi$；令 $x=-\sqrt{3}$，代入后一式，得 $C_2=-\pi$. 从而，当 $|x|\neq 1$ 时，有

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi, & x>1,\\ -\pi, & x<-1.\end{cases}$$

而当 $|x|=1$ 时，上式仍然成立. 于是，当 $|x|\geqslant 1$ 时，有

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x.$$

(2) 当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，由于

$$[3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)]'=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\cdot(3-12x^2)=0,$$

故有

$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=C\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数. 令 $x=0$，代入上式，即可求出 $C=\pi$. 于是，

$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x=\frac{1}{2}$ 左连续，在 $x=-\frac{1}{2}$ 右连续，分别取极限即知上式当 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{1}{2}$ 时也成立. 于是，

$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi\quad\left(|x|\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

【1265】 证明：若函数 $f(x)$ (1)在闭区间$[a,b]$上是连续的；(2)在此区间内有有限的导数 $f'(x)$；(3)不是线性函数，则在区间(a,b)内至少能找到一点 c，使得

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

给出这个事实的几何解释.

证 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，设

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

易知 $F(a)=F(b)=0$，且当 $a<x<b$ 时，$F(x)\not\equiv 0$ (因为$f(x)$为非线性函数). 设在 $c_1(a<c_1<b)$点，$F(c_1)\neq 0$，不妨设 $F(c_1)>0$，在区间$[a,c_1]$与$[c_1,b]$上分别应用拉格朗日定理，可知存在 $\xi_1\in(a,c_1)$使

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c_1-a}>0;$$

存在 $\xi_2\in(c_1,b)$，使

$$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}=-\frac{F(c_1)}{b-c_1}<0.$$

因而，

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad (1)$$

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad (2)$$

由此可知：

当$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$时，由(1)，$|f'(\xi_1)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$；

当$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$时，由(2)，$|f'(\xi_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

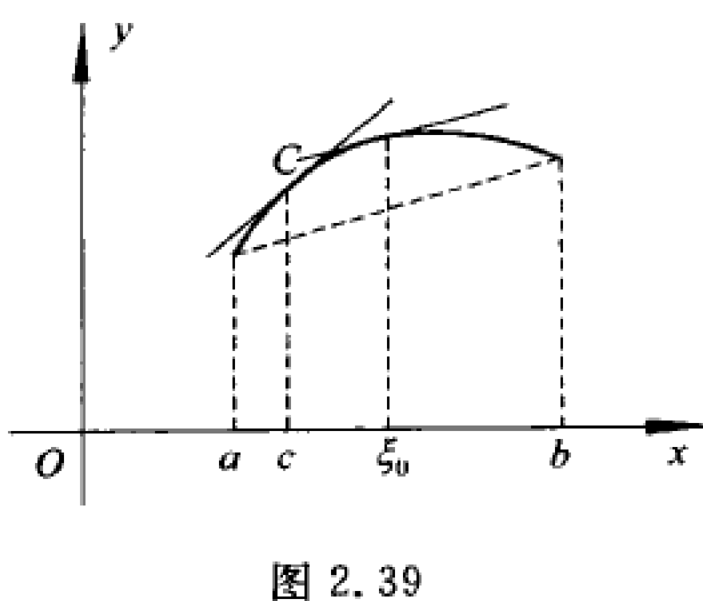


图 2.39

于是，命题得证.

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段（线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线），在曲线上至少存在一点 C，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的弦的斜率的绝对值，换句话说，此切线比此弦"陡"，如图 2.39 所示.

【1266】 证明：若函数 $f(x)$：(1)在区间$[a,b]$上有二阶导数 $f''(x)$； (2)$f'(a)=f'(b)=0$，则在区间(a,b)内至少存在一点 c，使得 $|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证 设 x_0 是$[a,b]$中任意固定的一点，两次应用柯西定理*，即得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi), \qquad (1)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间（即 $x_0\leqslant\xi\leqslant x$），$x$ 为$[a,b]$中任意点. 特别，在(1)式中取 $x_0=a$，$x=\frac{a+b}{2}$，并利用已知条件 $f'(a)=0$，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a<c_1<\frac{a+b}{2}$.

同理，在(1)式中取 $x_0=b$，$x=\frac{a+b}{2}$，并利用已知条件$f'(b)=0$，则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_2),$$

其中 c_2 满足$\frac{a+b}{2}<c_2<b$. 于是，

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|=\frac{(b-a)^2}{8}\{|f''(c_1)|+|f''(c_2)|\}. \qquad (2)$$

取 c 如下：若 $|f''(c_1)|\geqslant|f''(c_2)|$，则令 $c=c_1$；若 $|f''(c_1)|<|f''(c_2)|$，则令 $c=c_2$. 于是，$a<c<b$ 且

---

* 仅考虑 $x>x_0$（$x<x_0$ 时可类似地讨论）. 令

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)] \qquad G(x)=(x-x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0)=G(x_0)=0$，$F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$（记为 $F_1(x)$），$G'(x)=2(x-x_0)$（记为 $G_1(x)$），并且 $F'(x_0)=G'(x_0)=0$，（即 $F_1(x_0)=G_1(x_0)=0$），但当 $x\neq x_0$，$G'(x)\neq 0$，而

$$F_1'(x)=F''(x)=f''(x), \quad G_1'(x)=G''(x)=2.$$

应用柯西定理，得 $$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}=\frac{F_1(c)-F_1(x_0)}{G_1(c)-G_1(x_0)}=\frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{2},$$

此处 $\xi\in(x_0,c)$，而 $c\in(x_0,x)$，从而知 $\xi\in(x_0,x)$. 因此，有 $F(x)=\frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$ 也即有公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi).$$

其中 $x_0<\xi<x$（以后即将看到，这就是所谓的泰勒公式，这里就顺便给出了一个关于二阶的泰勒公式的另一种推论方法）.

$|f''(c)|=\max\{|f''(c_1)|,|f''(c_2)|\}$. 由此,根据(2),即得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(c)|.\quad 从而,\quad |f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

【1267】 汽车从某点开始行驶,于 t 秒内走完了路程,所经过的距离为 s. 证明:汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}$.

提示 利用 1266 题的结果.

解 利用 1266 题的结果即可得证. 此时 $s=f(t)$, $f(t)-f(0)=s$, $t-0=t$.

故 $a=\left.\frac{d^2 s}{dt^2}\right|_{t=t_1}$ 的绝对值 $|a|\geqslant\frac{4s}{t^2}$.

§7. 增函数与减函数. 不等式

1° **增函数与减函数** 若

$$当\ a\leqslant x_1<x_2\leqslant b\ 时,\quad f(x_2)>f(x_1)$$

[或当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时,$f(x_2)<f(x_1)$],则称函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的增函数(或减函数).

若可微函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的增函数(或减函数),则

$$当\ a\leqslant x\leqslant b\ 时,\quad f'(x)\geqslant 0$$

[或当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$f'(x)\leqslant 0$].

2° **函数递增(或递减)的充分条件** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的;并且在其内有正的(或负的)导数 $f'(x)$,则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内递增(或递减).

求下列函数的严格单调(增或减)区间:

【1268】 $y=2+x-x^2$.

解 $y'=1-2x$. 当 $-\infty<x<\frac{1}{2}$ 时,$y'>0$,函数递增;当 $\frac{1}{2}<x<+\infty$ 时,$y'<0$,函数递减.

【1269】 $y=3x-x^3$.

解 $y'=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y'<0$,函数递减;当 $-1<x<1$ 时,$y'>0$,函数递增;当 $1<x<+\infty$ 时,$y'<0$,函数递减.

【1270】 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y'=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y'<0$,函数递减;当 $-1<x<1$ 时,$y'>0$,函数递增;当 $1<x<+\infty$ 时,$y'<0$,函数递减.

【1271】 $y=\frac{\sqrt{x}}{x+100}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y'=\frac{-x+100}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$. 当 $0<x<100$ 时,$y'>0$,函数递增;当 $100<x<+\infty$ 时,$y'<0$,函数递减.

【1272】 $y=x+\sin x$.

解 $y'=1+\cos x\geqslant 0$. 当 $-\infty<x<+\infty$ 时,函数递增.

【1273】 $y=x+|\sin 2x|$.

解 $y'=1+2\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cos 2x\quad(x\neq\frac{k\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $x\in\left(\frac{k\pi}{2},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$时，$y'>0$，函数递增；

当 $x\in\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$时，$y'<0$，函数递减，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

【1274】 $y=\cos\frac{\pi}{x}$.

解 $y'=\frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi$，即当 $x\in\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$及 $x\in\left(-\frac{1}{2k+1},-\frac{1}{2k+2}\right)$时，$y'>0$，函数递增($k=1,2,\cdots$)；

同理，当 $x\in\left(\frac{1}{2k+2},\frac{1}{2k+1}\right)$及 $x\in\left(-\frac{1}{2k},-\frac{1}{2k+1}\right)$时，$y'<0$，函数递减 ($k=1,2,\cdots$).

【1275】 $y=\frac{x^2}{2^x}$.

解 $y'=\frac{2x-x^2\ln2}{2^x}$.

当$-\infty<x<0$ 及 $\frac{2}{\ln2}<x<+\infty$时，$y'<0$，函数递减；当 $0<x<\frac{2}{\ln2}$时，$y'>0$，函数递增.

【1276】 $y=x^n e^{-x}$ $(n>0,\ x\geqslant0)$.

解 $y'=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

当 $x\in(0,n)$时，$y'>0$，函数递增；当 $x\in(n,+\infty)$时，$y'<0$，函数递减.

【1277】 $y=x^2-\ln x^2$.

解 $y'=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当$-\infty<x<-1$ 及 $0<x<1$ 时，$y'<0$，函数递减；

当$-1<x<0$ 及 $1<x<+\infty$时，$y'>0$，函数递增.

【1278】 $f(x)=\begin{cases}x\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sin\ln x\right), & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 $f'(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sin\ln x+\cos\ln x=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right)$ $(x>0)$.

令 $f'(x)=0$，得 $\sin\left(\ln x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 解上述方程得 $x=e^{-\frac{11}{12}\pi+2k\pi}$，$x=e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi}$

或 $x=e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi}$，$x=e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $x\in(e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi})$时，$f'(x)>0$，函数递增；

当 $x\in(e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi})$时，$f'(x)<0$，函数递减.

【1279】 证明：圆的内接正 n 边形的周长 p_n，当边的数目 n 增加时增加，而此圆的外切正 n 边形的周长 P_n 此时则减小. 利用这点来证明，当 $n\to\infty$时，p_n 及 P_n 有相同的极限.

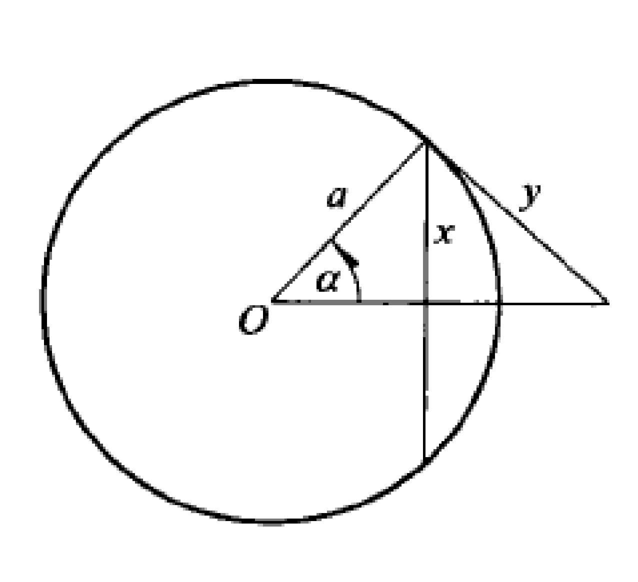


图 2.40

证 如图 2.40 所示，我们有

$$p_n=2nx=2na\sin\alpha=2na\sin\frac{\pi}{n},$$

$$P_n=2ny=2na\tan\alpha=2na\tan\frac{\pi}{n}.$$

考虑 $f(x)=\frac{2a}{x}\sin\pi x$. 易证当 $x(x>0)$ 很小时有 $f'(x)<0$,从而,当 x 变小时 $f(x)$ 递增. 所以,$p_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增加时,p_n 增加. 同样,令 $g(x)=\frac{2a}{x}\tan\pi x$,利用 $x<\tan x$(当 x 很小时,$x>0$),可证得 $g'(x)>0$,情形相反,当 x 变小时,$g(x)$ 递减,故 $P_n=g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增加时减小. 总之,有 $p_n<p_{n+1}$ 及 $P_{n+1}<P_n$,并且显然有 $p_{n+1}<P_{n+1}$. 于是,

$$p_n<p_{n+1}<P_{n+1}<P_n,$$

故 $\{P_n\}$ 是有界减数列,$\{p_n\}$ 是有界增数列,从而,它们的极限都存在,但

$$\lim_{n\to\infty}(P_n-p_n)=\lim_{n\to\infty}2\pi a\left(\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}-\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)=0,$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$.

【1280】 证明:函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,+\infty)$ 内递增.

证 设 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$,则 $y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$.

由于当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>0$,因此要看 y' 为正或为负,只需看 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$,则

$$z'=-\frac{1}{x(1+x)^2}>0,\quad x\in(-\infty,-1),$$

故当 $-\infty<x<-1$ 时 z 递增,又 $\lim\limits_{x\to-\infty}z=0$,因而 $z>0$. 于是,在 $(-\infty,-1)$ 内 $y'>0$,因此,函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 内递增.

同理可证,函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内递增.

【1281】 证明:有理整函数 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ $(n\geqslant1,\ a_n\neq0)$ 是区间 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 上的严格单调函数,其中 x_0 为充分大的正数.

证 由于

$$P_n'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}=x^{n-1}\left(na_n+\frac{(n-1)a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}\right).$$

而

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(n-1)a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}\right]=0,$$

故存在 $x_0>0$,使当 $|x|>x_0$ 时,

$$\left|\frac{(n-1)a_{n-1}}{a}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}\right|<n|a_n|.$$

由此可知,当 $-\infty<x<-x_0$ 或 $x_0<x<+\infty$ 时 $P_n'(x)$ 均保持定号(例如,若 $a_n>0$,则当 $x_0<x<+\infty$ 时,$P_n'(x)>0$),故 $P_n(x)$ 是区间 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 上的严格单调函数. 证毕.

【1282】 证明:有理函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}\quad(m+n\geqslant1,\ m\neq n^{*)}\ a_nb_m\neq0)$$

是区间 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 上的严格单调函数,其中 x_0 为充分大的正数.

证 我们有

$$R'(x)=\frac{1}{(b_1+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{[a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}][b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m]$$

$$-[b_1+2b_2x+\cdots+mb_mx^{m-1}][a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n]\}$$

$$=\frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{(a_1b_0-a_0b_1)+2(a_2b_0-a_0b_2)x+\cdots$$

$$+[(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2}+(n-m)a_nb_m\,a^{m+n-1}\}$$

$$=\frac{x^{m+n-1}}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\Big[(n-m)a_nb_m+\frac{(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m}{x}+\cdots$$

$$+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{x^{m+n-1}}\Big].$$

仿1281题的证法，可知存在 $x_0>0$，使当 $|x|>x_0$ 时上式右端方括弧内的式子与第一项 $(n-m)a_nb_m$ 同符号，由此可知，当 $-\infty<x<-x_0$ 或 $x_0<x<+\infty$ 时，$R_n'(x)$ 均保持定号，故 $R(x)$ 是区间 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 上的严格单调函数.

*）本题应加上条件 $m\neq n$（原题上没有）. 否则所述结论不成立. 例如，若 $m=n, a_i=b_i\ (i=0,1,\cdots,n)$，则 $R(x)\equiv1$，它在 $(x_0,+\infty)$ 上显然不是严格单调的.

【1283】 单调函数的导数是否也必为单调的？

提示 不. 例如，函数 $f(x)=x+\sin x$，在 $(0,+\infty)$ 上.

解 不. 例如函数

$$f(x)=x+\sin x,$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内，由于 $f'(x)=1+\cos x>0$（除 $x=(2n+1)\pi,\ n=0,1,\cdots$），所以它是单调增加的；然而其导数 $f'(x)$ 却不是单调的. 事实上由于 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f'(\pi)=0,\ f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$，显见并非是单调的.

【1284】 证明：若 $\varphi(x)$ 为可微的单调增函数，且当 $x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$，则当 $x\geqslant x_0$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0).$$

给出这个事实的几何解释.

证明思路 分别令 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x), \psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$. 对 $\psi(x)$ 及 $\psi_1(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上应用拉格朗日定理. 或用反证法.

证 证法1：

作函数 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$，由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)\quad(x_0<\xi<x).$$

由 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$ 知 $\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant0$. 从而，$\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0). \tag{1}$$

再令 $\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$，同理有 $\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x_0)-f(x). \tag{2}$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant|f(x)-f(x_0)|.$$

证法2：

用反证法. 若有一点 $b>x_0$，使得

$$|f(b)-f(x_0)|>\varphi(b)-\varphi(x_0).$$

设 $F(x)=f(x)-f(x_0)-\dfrac{f(b)-f(x_0)}{\varphi(b)-\varphi(x_0)}[\varphi(x)-\varphi(x_0)]$，由于 $F(b)=F(x_0)=0$，所以根据罗尔定理，得知存在点 $c\in(x_0,b)$ 使 $F'(c)=0$，即

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(x_0)}{\varphi(b)-\varphi(x_0)}\varphi'(c)=0.$$

因而，有 $|f'(c)|=\dfrac{|f(b)-f(x_0)|}{\varphi(b)-\varphi(x_0)}\varphi'(c)>\varphi'(c)$. 这与题设条件 $|f'(c)|\leqslant\varphi'(c)$（对于一切 $x\geqslant x_0$ 而言）相矛盾. 于是，命题获证.

其几何意义就是：若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应的点的切线“陡”，则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦“陡”. 如图 2.41 所示.

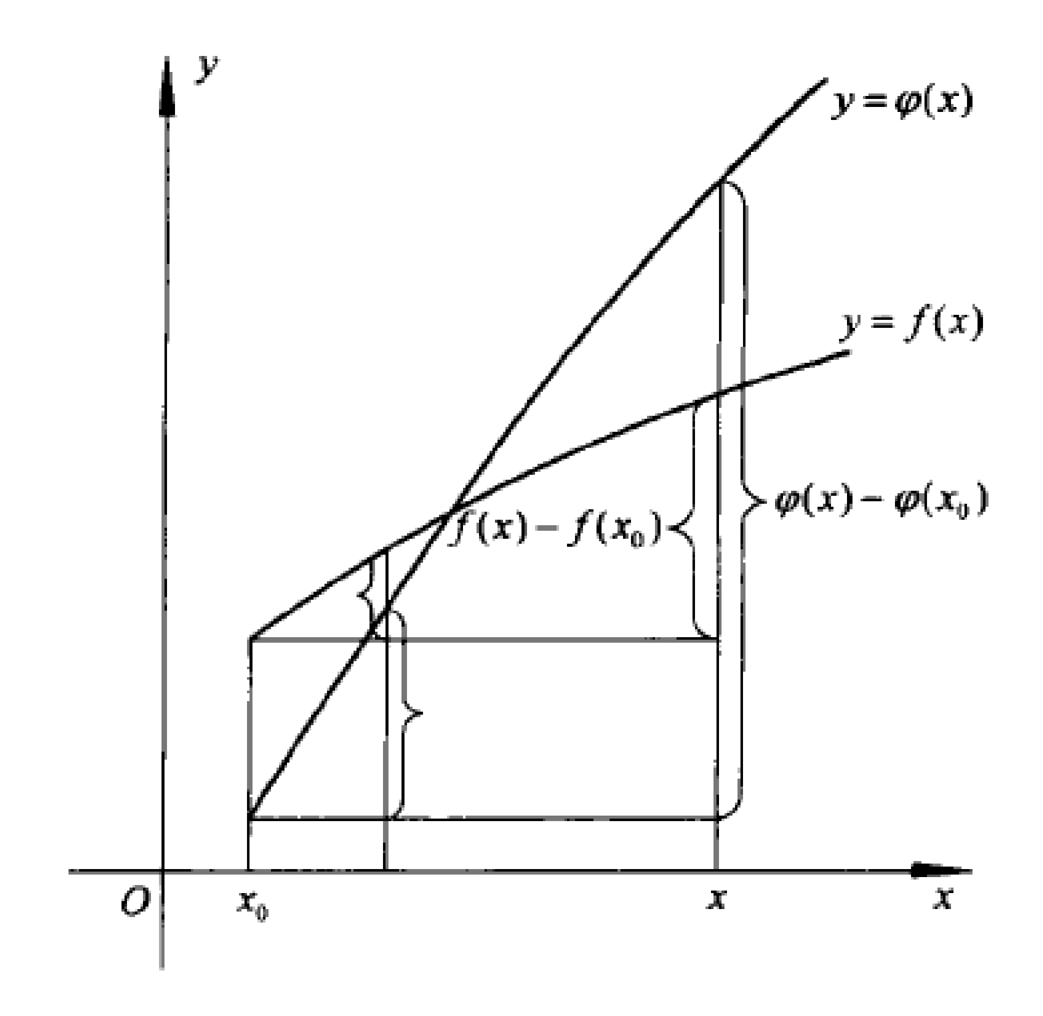


图 2.41

【1285】 设函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty$ 内连续，而且当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常数. 证明：若 $f(a)<0$，则在区间 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

证明思路 先利用拉格朗日定理证明 $f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$，再根据连续函数的介值定理及函数的单调性，命题易获证.

证 由有限增量公式，有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=-\frac{f(a)}{k}f'(\xi)>-\frac{f(a)}{k}\cdot k=-f(a).$$

于是，$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$. 又 $f(a)<0$，故根据连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根. 又因为当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内递增，由此可知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一个实根.

【1286】 若于某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内，函数增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 的符号与自变量增量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，称函数 $f(x)$ 为在 x_0 点的增函数.

证明：若函数 $f(x)(a<x<b)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 内的每一点皆为增函数，则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1<x_2(a<x_1<x_2<b)$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$. 对 $[x_1,x_2]$ 中每一点 c，由假定都存在开区间 $\Delta_c=(c-\delta_c,c+\delta_c)$ 使当 $0<|x-c|<\delta_c$ 时，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$. 于是，诸区间 $\{\Delta_c\}$（c 取遍 $[x_1,x_2]$）形成 $[x_1,x_2]$ 的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理，从 $\{\Delta_c\}$ 中可选出有限个，设为 $\Delta_{c_1},\Delta_{c_2}\cdots\Delta_{c_m}$，它们已经复盖了 $[x_1,x_2]$. 不妨设 $x_1<c_1<c_2<\cdots<c_m<x_2$，而且可设诸 Δ_{c_i} 互不包含（因若 $\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$，则可将 Δ_{c_i} 舍去）. 于是，必有 $x_1\in\Delta_{c_1}$（因若 x_1 不属于 Δ_{c_1}，而属于某 Δ_{c_j}，$j>1$，则显然有 $\Delta_{c_1}\subset\Delta_{c_j}$，此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾）. 另外，易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$ 必有公共点 $\bar{x}_i$（因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点，则点 $c_i+\delta_{c_i}$ 必属于某 Δ_{c_j}，$j\neq i$，$j\neq i+1$，若 $j<i$，则 $\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$，矛盾；若 $j>i+1$，则 $\Delta_{c_{i+1}}\subset\Delta_{c_j}$，也矛盾）. 显然可取公共点 $\bar{x}_i$ 满足 $c_i<\bar{x}_i<c_{i+1}$.

于是，

$$f(c_i)<f(\bar{x}_i)<f(c_{i+1})\ (i=1,2,\cdots,m-1).$$

同理，可知 $x_2 \in \Delta_{c_m}$. 于是，我们有

$$f(x_1)<f(c_1)<f(c_2)<\cdots<f(c_m)<f(x_2).$$

证毕.

【1287】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 是增函数，但在包含这点的任何区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 中并非增函数，其中 $\varepsilon>0$ 为任意小的数. 作出此函数的略图.

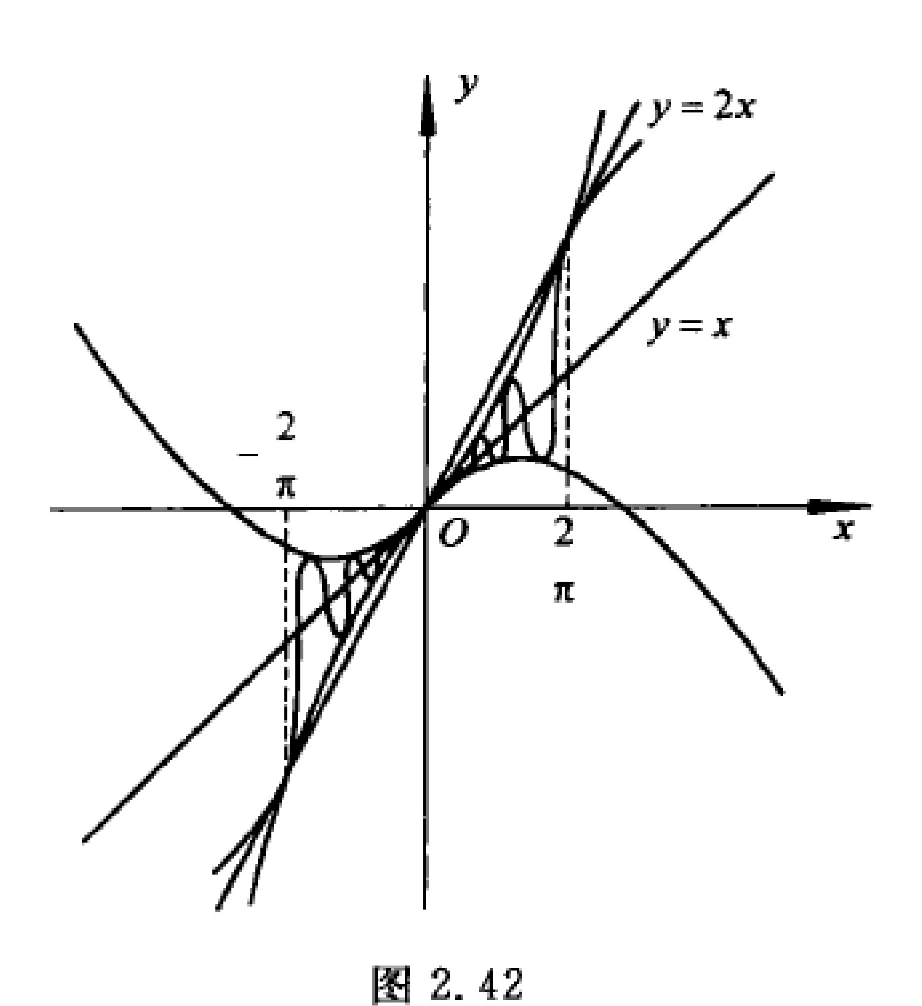


图 2.42

证 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$
$$=1>0,$$

所以，$f(x)$ 在点 $x=0$ 是增函数. 又当 $x\neq 0$ 时，

$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-4n\pi\begin{cases}<0, & n\text{ 为正整数},\\ >0, & n\text{ 为负整数}.\end{cases}$$

而 $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=0$. 故 $f(x)$ 在点 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 都达极大值. 由于 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$，故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是增函数（作无穷次振荡，如图 2.42 所示）.

【1288】 证明定理：设(1)函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 n 阶可微函数；(2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)(k=0,1,2,\cdots,n-1)$；(3)当 $x>x_0$ 时，$\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，则当 $x>x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x)>\psi(x).$$

证明思路 令 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则由条件(3)可知

$$F^{(n)}(x)>0\quad(x>x_0),$$

从而，$F^{(n-1)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 又由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0)=0.$$

因此，当 $x>x_0$ 时，$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0$. 由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 反复应用条件(2)，命题可获证.

证 设 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则由于 $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，所以，

$$F^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)-\psi^{(n)}(x)>0\quad(x>x_0).$$

因此，$F^{(n-1)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 又由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0)=\varphi^{(n-1)}(x_0)-\psi^{(n-1)}(x_0)=0,$$

因此，

$$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0\quad(x>x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 再由条件(2)知

$$F^{n-2}(x_0)=\varphi^{(n-2)}(x_0)-\psi^{(n-2)}(x_0)=0,\quad 故\quad F^{(n-2)}(x)>F^{(n-2)}(x_0)=0\quad(x>x_0).$$

依此类推，最后得

$$F(x)>F(x_0)=0\ (x>x_0),\quad 即\quad \varphi(x)>\psi(x)\ (x>x_0).$$

【1289】 证明下列不等式：

(1) 当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$；　　(2) 当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

(3) 当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$；　　(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{x^3}{3}$；

(5) 当 $x>0,y>0$ 及 $0<\alpha<\beta$ 时，$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$. 给出不等式(1)～(4)的几何解释.

证　(1) 设 $f(x)=e^x-(1+x)$，则当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=e^x-1>0,$$

所以，$f(x)>f(0)=0\ (x>0)$，即 $e^x>1+x\quad(x>0)$.

同理可证，当 $x<0$ 时，$e^x>1+x$.

总之，当 $x\neq0$ 时，$e^x>1+x$.

此不等式的几何意义是，曲线 $y=e^x$ 位于曲线 $y=1+x$ 的上方. 如图 2.43 所示.

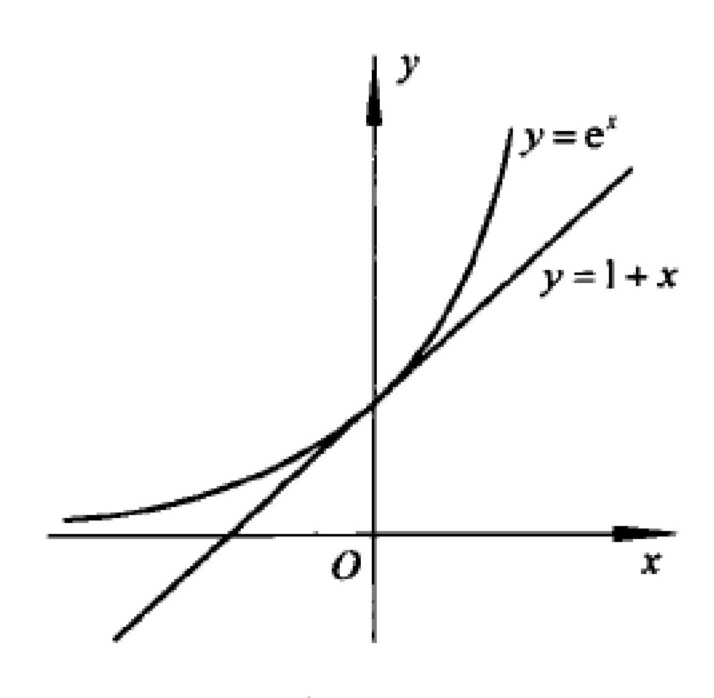


图 2.43

(2) 设 $\varphi(x)=x$，$\psi(x)=\ln(1+x)$，则

$$\varphi'(x)=1,\quad \psi'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>\psi'(x)$，即 $\varphi'(x)-\psi'(x)>0$，且有 $\varphi(0)=\psi(0)=0$，从而，

$$\varphi(x)-\psi(x)>\varphi(0)-\psi(0)=0\quad(x>0),$$

即

$$x-\ln(1+x)>0\quad(x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

所以，当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.

此不等式表示对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的图像介于抛物线 $y=x-\frac{x^2}{2}$ 和直线 $y=x$ 之间 $(x>0)$. 如图 2.44 所示.

图 2.44

(3) 令 $F(x)=x-\sin x$，则

$$F'(x)=1-\cos x>0\ (\text{当 } x>0,\ x\neq2n\pi,\ n=1,2,\cdots\text{时}),$$

故 $F(x)$ 当 $x>0$ 时是递增的. 因此，当 $x>0$ 时，有

$$F(x)>F(0)=0,\quad 从而,\quad x>\sin x\quad(x>0).$$

其次再证，$x-\frac{x^3}{6}<\sin x\ (x>0)$. 设

$$\psi_1(x)=x-\frac{x^3}{6},\quad \varphi_1(x)=\sin x,$$

则有　　$\psi_1(0)=\varphi_1(0)=0,\quad \psi_1'(0)=\varphi_1'(0)=1.$

又因 $\psi_1''(x)=-x$，$\varphi_1''(x)=-\sin x$，于是，当 $x>0$ 时，有 $\varphi_1''(x)>\psi_1''(x)$. 利用 1288 题的结果得知，

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}\quad(x>0).$$

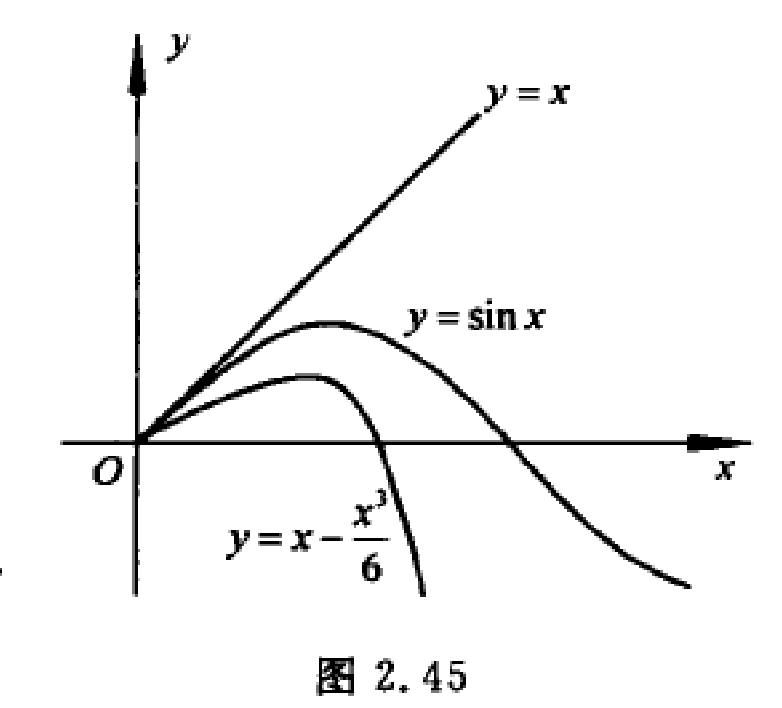


图 2.45

所以，当 $x>0$ 时 $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$. 此不等式表示，在 y 轴的右侧，曲线 $y=\sin x$ 介于直线 $y=x$ 和曲线 $y=x-\frac{x^3}{6}$ 之间. 如图 2.45 所示.

(4) 令 $f(x)=\tan x-(x+\frac{x^3}{3})$，则 $f(0)=0$. 又

$$f'(x)=\frac{1-\cos^2x-x^2\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{\cos^2x}$$

显然有

$$\sin x - x\cos x > 0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

故

$$f'(x) > 0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

从而，$f(x)>0$，即 $\tan x > x+\frac{x^3}{3}$.

此不等式表示，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，曲线 $y=\tan x$ 在曲线 $y=x+\frac{x^3}{3}$ 的上方. 如图 2.46 所示.

图 2.46

(5) 当 $x=y$ 时，由 $0<\alpha<\beta$ 知，不等式 $2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{\frac{1}{\beta}}$ $(x>0,\ y>0)$ 显然成立.

当 $x\neq y$，且 $x>0, y>0$，不妨设 $0<\frac{y}{x}<1$. 令 $a=\frac{y}{x}$，为证不等式，只要证明 $f(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 递减，也即只要证明函数 $F(t)=\frac{1}{t}\ln(1+a^t)$ 递减. 实际上，因为

$$F'(t)=\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{\ln(1+a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t>0$ 时，有 $a^t-\frac{a^{2t}}{2}<\ln(1+a^t)$ *)，所以，

$$F'(t)<\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{a^t-\frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0<a<1$ 及 $t>0$，所以，$\ln a<0$ 及 $a^t>a^{2t}>\frac{a^{2t}}{2}$，从而，$F'(t)<0$，即 $F(t)$ 是递减的，从而，当 $x\neq y$ 时，不等式

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立.

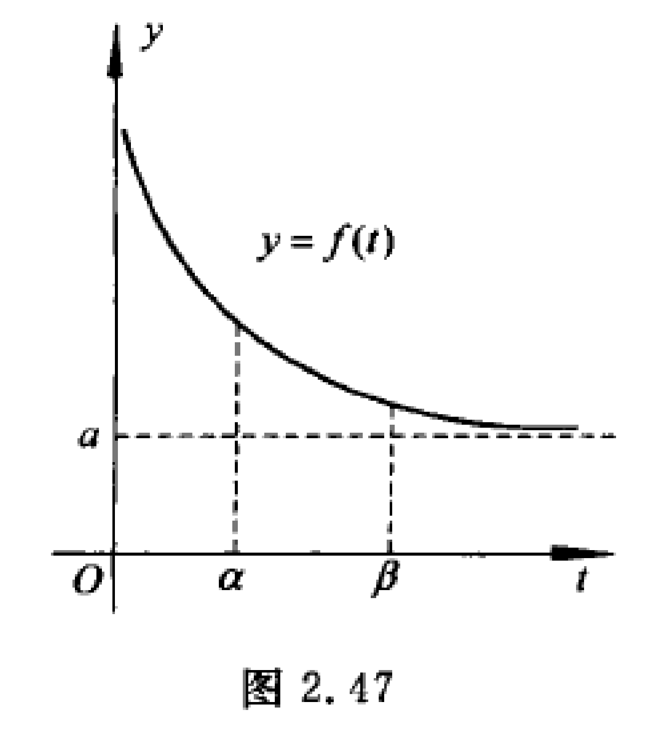


图 2.47

作 $f(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图像，如图 2.47 所示. 对于 $(0,+\infty)$ 内任意两个值 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，图像上对应点的纵坐标却相应地减小，$f(\alpha)>f(\beta)$.

*) 利用本题(2)的结果.

【1290】 证明：不等式 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时成立.

证 不等式的后半部分于 1289 题(3)中已证明，我们仅证其前半部分.

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x),$$

由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x>0$ 及 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}>x$，于是，在此区间内 $f'(x)<0$. 所以，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是递减的. 因而，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad 即\quad \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

所以，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

【1291】 证明：当 $x>0$ 时有不等式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

证 由于当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 递增(利用 1280 题的结果)，并且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}\quad(x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 递减，并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\mathrm{e},$$

所以，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>\mathrm{e}\quad(x>0)$.

【1292】 等差数列与等比数列的项的数目相同且有相同的首项与末项，并且一切项都是正的. 证明：等差数列各项的和大于或等于*) 等比数列各项的和.

证 证法 1：

设等差数列各项为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，公差为 d；等比数列各项为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，公比为 q. 记其和为

$$\sigma=\sum_{k=1}^n a_k,\quad Q=\sum_{k=1}^n b_k.$$

当 $q=1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$，可知有 $\sigma=Q$.

当 $q<1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=a_1+(n-1)d$，$b_n=b_1q^{n-1}$ 且 $a_n=b_n$ 得知

$$a_1+(n-1)d=b_1q^{n-1},\quad 即\quad d=-\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1\quad(a_1>0).$$

则有

$$\sigma=\sum_{k=1}^n[a_1+(k-1)d]=\sum_{k=1}^n\left[a_1-\frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1\right]=a_1\left[n-\frac{1}{n-1}(1-q^{n-1})\sum_{l=0}^{n-1}l\right]$$

$$=\frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$

$$Q=\sum_{k=1}^n a_1q^{k-1}=a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

研究

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q)=n(1-q)(1+q^{n-1})-2(1-q^n)=n(1-q+q^{n-1}-q^n)-2(1-q^n)$$

$$=(n-2)(1-q^n)-nq(1-q^{n-2}).$$

作函数

$$\varphi(t)=(n-2)(1-t^n),\quad \psi(t)=nt(1-t^{n-2}),$$

则有 $\varphi(1)=\psi(1)=0$，$\varphi'(1)=\psi'(1)=-n(n-2)$. 但是，

$$\varphi''(t)=-n(n-1)(n-2)t^{n-2},\quad \psi''(t)=-n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $0<t<1$ 时，有 $\psi''(t)<\varphi''(t)$，利用 1288 题的结果有，

$$\psi(t)<\varphi(t)\quad(0<t<1),$$

即当 $q<1$ 时，$\psi(q)<\varphi(q)$. 从而，

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q)=\varphi(q)-\psi(q)>0.$$

这就证明了 $\sigma>Q$.

当 $q>1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$ 得知

$$d=\frac{q^{n-1}-1}{n-1}a_1>0.$$

又 $$\sigma=\sum_{k=1}^n[a_1+(k-1)d]=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$

$$Q=\sum_{k=1}^n a_1q^{k-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

与上述讨论相同，有

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)=(n-2)(q^n-1)-nq(q^{n-2}-1).$$

作函数

$$\varphi(t)=(n-2)(t^n-1),\quad \psi(t)=nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1)=\psi(1)=0,\quad \varphi'(1)=\psi'(1)=n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-2},\quad \psi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t>1$ 时，有 $\varphi''(t)>\psi''(t)$，利用 1288 题的结果有

$$\varphi(t)>\psi(t).$$

于是，当 $q>1$ 时，便得 $\varphi(q)>\psi(q)$. 因而，

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)=\varphi(q)-\psi(q)>0.$$

从而，完全证明了 $\sigma>Q$.

证法 2：

设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 q.

如果 $d=0$，易见两个数列均为常数数列，因此，其和相等.

如果 $d\neq 0$，不妨设 $d>0$（否则把末项变为首项，将数列颠倒即成），由于各项均为正的，所以，$q>0$.

设首项为 a，则末项为 $a+nd=aq^n$. 考虑函数

$$f(x)=a+xd-aq^x.$$

由于 $f(0)=f(n)=0$，所以，在 $(0,n)$ 内存在一点 c，使得 $f'(c)=0$，而 $f''(x)=-aq^x\ln^2 q<0$. 从而，

$$f'(x)=d-aq^x\ln q$$

为减函数.

所以，当 $x<c$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>c$ 时，$f'(x)<0$. 从而，当 $0\leqslant x\leqslant n$ 时，$f(x)\geqslant 0$，其中等号当且仅当 $x=0$ 及 $x=n$ 时成立. 特别是，对于 $0<k<n$，有

$$f(k)=a+kd-aq^k>0,\quad 即\quad a+kd>aq^k.$$

于是，$\sum\limits_{k=0}^{n}(a+kd)>\sum\limits_{k=0}^{n}aq^k$.

*）原题要求证明“大于”. 实际应为“大于或等于”.

【1293】 用不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geqslant 0$，其中 $x,a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，来证明柯西—布尼亚科夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

提示 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 均成立，由其判别式不能为正，命题即可获证.

证 由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leqslant 0,$$

也即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

【1294】 证明：正数的算术平均值的平方不大于这些数的平方平均值，即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

提示 利用 1293 题的结果，并令 $a_k=x_k$， $b_k=\frac{1}{n}$.

证 利用 1293 题的结果，设 $a_k=x_k$， $b_k=\frac{1}{n}$，则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

所以，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

【1295】 证明：正数的几何平均值不大于这些数的算术平均，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

提示 应用数学归纳法.

证 设 $G_n=(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$，$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$. 则有

$$(G_n)^n=x_1x_2\cdots x_n，\ nA_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

当 $n=2$ 时，我们已有不等式

$$\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2}.$$

今假定 $n=k$ 时，有 $G_k \leqslant A_k$，我们来证 $n=k+1$ 时，有 $G_{k+1} \leqslant A_{k+1}$.

事实上，

$$G_{k+1}=(x_1x_2\cdots x_kx_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}=[(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \leqslant (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leqslant (A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

如果我们设

$$f(x)=x^\alpha-(1-\alpha+\alpha x) \quad (0<\alpha<1),$$

由

$$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\begin{cases} >0, & 0<x<1, \\ 0, & x=1, \\ <0, & x>1, \end{cases}$$

故知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是递增的，而在 $[1,\infty)$ 上是递减的. 令 $\alpha=\frac{1}{p}$，$1-\alpha=\frac{1}{q}$，用 $\frac{a}{b}$ 代替 x，于是，就有下列不等式：

当 $a>0$，$b>0$，$p>1$，$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

令 $A_k=a$，$x_{k+1}=b$，$p=\frac{k+1}{k}>1$，$q=k+1>1$，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=1,$$

所以，

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leqslant \frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}.$$

于是，

$$G_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}=\frac{1}{k+1}(kA_k+x_{k+1})=\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})=A_{k+1}.$$

从而有

$$G_{k+1}\leqslant A_{k+1}.$$

按照数学归纳法知不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

对于任何正整数 n 均成立.

【1296】 设 a 及 b 为二正数,则由等式

$$\Delta_s(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, & s\neq 0,\\ \lim\limits_{t\to 0}\Delta_t(a,b), & s=0\end{cases}$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均值.

例如,当 $s=-1$ 时得调和平均值,当 $s=0$ 时得几何平均值(试证明!);当 $s=1$ 时得算术平均值;当 $s=2$ 时得平方平均值.

证明:(1) $\min(a,b)\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant\max(a,b)$;

(2) 当 $a\neq b$ 时,函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)$, $\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)$.

提示 (2)考虑 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\Delta_s(a,b)$.

证 先证当 $s=0$ 时得几何平均数,由题设知

$$\Delta_0(a,b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b)=\lim_{s\to 0}e^{\frac{1}{s}\ln\frac{a^s+b^s}{2}},$$

研究 $f(x)=\ln\dfrac{a^x+b^x}{2}$ 在点 $x=0$ 的导数,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right\}.$$

另一方面,

$$f'(0)=f'(x)\Big|_{x=0}=\left[\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{1}{2}(a^x\ln a+b^x\ln b)\right]\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a,b)=e^{f'(0)}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab},$$

此即几何平均值.

(1) 由于 $2[\min(a,b)]^s\leqslant a^s+b^s\leqslant 2[\max(a,b)]^s$,所以,

$$\min(a,b)\leqslant\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\max(a,b),\quad 即\quad \min(a,b)\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant\max(a,b).$$

(2)考虑 $\ln\Delta_s(a,b)=\dfrac{1}{s}\ln\dfrac{a^s+b^s}{2}$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\Delta_s(a,b)=-\frac{1}{s^2}\ln\frac{a^s+b^s}{2}+\frac{a^s\ln a+b^s\ln b}{s(a^s+b^s)}=\frac{1}{s^2(a^s+b^s)}\left[(a^s\ln a^s+b^s\ln b^s)-(a^s+b^s)\ln\frac{a^s+b^s}{2}\right].$$

由于 $a^s>0$, $b^s>0$,参看 1314 题(3)的结果知

$$a^s\ln a^s+b^s\ln b^s>(a^s+b^s)\ln\frac{a^s+b^s}{2},$$

所以,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\Delta_s(a,b)>0$,即 $\ln\Delta_s(a,b)$ 是增函数,由于对数函数是增函数,故知函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的增函数.

(3) 不妨设 $0<a<b$. 于是,

$$\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\lim_{s\to-\infty}a\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^s\right]^{\frac{1}{s}}=a=\min(a,b),$$

$$\lim_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\lim_{s\to+\infty}b\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^s+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{s}}=b=\max(a,b).$$

【1297】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为二阶可微函数及 $M_k=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\ (k=0,1,2)$. 证明不等式：$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

证 运用 1266 题附注的公式（对任何 h）

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2\quad(x\leqq\xi_1\leqq x+h),\tag{1}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2\quad(x-h\leqq\xi_2\leqq x),\tag{2}$$

(1)减(2)，得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

即

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

所以，

$$2h|f'(x)|\leqslant|2hf'(x)|\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant 2M_0+h^2M_2,$$

即 $M_2h^2-2|f'(x)|h+2M_0\geqslant 0$.

由于此式对任何 h 都成立，故此二次式的判别式必非正：

$$4|f'(x)|^2-4M_2(2M_0)\leqslant 0,$$

即 $|f'(x)|^2\leqslant 2M_0M_2$.

由此可得 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$. 证毕.

§8. 凹凸性. 拐点

1° **凹凸性的充分条件** 若曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 的一段，位于其任意一点的切线之上（或之下），则称这个可微函数 $y=f(x)$ 的图像在闭区间 $[a,b]$ 上是凹*（或对应地，凸）的. 在假设二阶导数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a<x<b$ 时不等式

$$f''(x)>0\quad[\text{或对应地 } f''(x)<0]$$

成立，为图像是凹（或对应地，凸）的充分条件.

2° **拐点的充分条件** 若函数的图像在某点的凹凸性改变，则称此点为拐点.

若在点 x_0 有 $f''(x_0)=0$，或者 $f''(x_0)$ 虽不存在但 $f'(x_0)$ 有意义，并且无论在哪种情形下，$f''(x)$ 在 x 经过 x_0 时改变符号，则 x_0 是拐点.

【1298】 研究曲线 $y=1+\sqrt[3]{x}$ 于 $A(-1,0)$，$B(1,2)$ 及 $C(0,0)$ 诸点的凹凸性.

解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，$y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

在 $A(-1,0)$ 点，$y''=\dfrac{2}{9}>0$，故在该点附近曲线的图像是凹的；

在 $B(1,2)$ 点，$y''=-\dfrac{2}{9}<0$，故在该点附近曲线的图像是凸的；

---

* 关于凹（凸）的定义仍沿用原书第三版的定义.

《题解》作者注

在 $C(0,0)$ 点附近，y'' 变号，因此，点 C 是拐点. 在 C 点左边($x<0$)，$y''>0$ 曲线是凹的；在 C 点右边($x>0$)，$y''<0$，曲线是凸的. 注意，当 $x=0$ 时，y'' 不存在.

求下列函数的图像的凹或凸的区间及拐点：

【1299】 $y=3x^2-x^3$.

解 $y'=6x-3x^2$， $y''=6-6x$.

当 $-\infty<x<1$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；当 $1<x<+\infty$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；$x=1$ 是拐点.

注 或者说，点 $(1,2)$ 是拐点. 以后二者通用，不再说明.

【1300】 $y=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

解 $y'=-\dfrac{2a^3x}{(a^2+x^2)^2}$，$y''=-\dfrac{2a^3(a^2-3x^2)}{(a^2+x^2)^3}$.

当 $|x|<\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；当 $|x|>\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；$x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

【1301】 $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

解 $y'=1+\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$， $y''=\dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty<x<0$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；当 $0<x<+\infty$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；
$x=0$ 是拐点（注意，$x=0$ 时，y'' 不存在）.

【1302】 $y=\sqrt{1+x^2}$.

解 $y'=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$y''=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}>0$，图像始终呈凹状. 无拐点.

【1303】 $y=x+\sin x$.

解 $y'=1+\cos x$， $y''=-\sin x$.

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；当 $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；
$x=k\pi$ 是拐点($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

【1304】 $y=e^{-x^2}$.

解 $y'=-2xe^{-x^2}$， $y''=e^{-x^2}(4x^2-2)$.

当 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；当 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点.

【1305】 $y=\ln(1+x^2)$.

解 $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$， $y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x|<1$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；当 $|x|>1$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；$x=\pm1$ 是拐点.

【1306】 $y=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$， $y''=\dfrac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln x\right)$.

令 $y''=0$，得 $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

当 $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；
$x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 是拐点($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

【1307】 $y=x^x$ $(x>0)$.

解 $y'=x^x(\ln x+1)$， $y''=x^x\left[\dfrac{1}{x}+(1+\ln x)^2\right]$. 当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图像始终是凹的.

【1308】 证明：曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图像.

证 $y'=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$， $y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y''=0$ 得 $x_1=-2-\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=1$，

对应的函数值为 $y_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$，$y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$y_3=1$. 由于

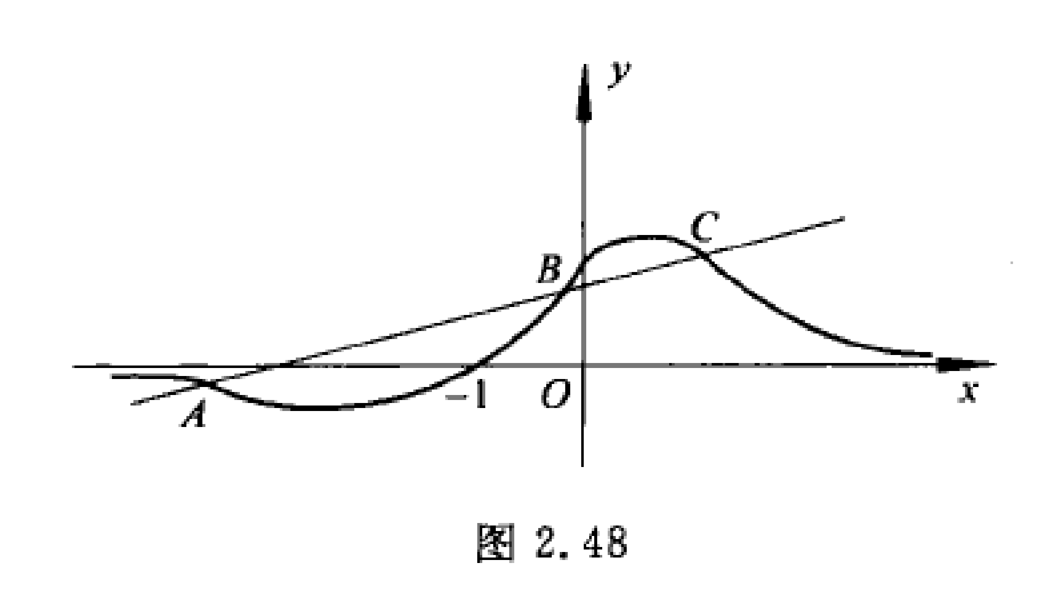


图 2.48

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}=0$$

所以，拐点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$及 $C(x_3,y_3)$在一条直线上(图 2.48).

【1309】 如何选择参量 h，可使"概率曲线"$y=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$有拐点 $x=\pm\sigma$?

解 $y'=\dfrac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$， $y''=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2)$.

令 $y''=0$，得 $x^2=\dfrac{1}{2h^2}$. 由于拐点为 $x=\pm\sigma$，故有 $h^2=\dfrac{1}{2\sigma^2}$，即 $h=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ $(\sigma>0)$.

【1310】 研究摆线(旋轮线)$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$的凹凸性.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'_ty''_t-x''_ty'_t}{(x'_t)^3}=-\frac{\csc^2\dfrac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}<0 \quad (2k\pi<t<2(k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\cdots),$$

故摆线始终呈凸状.

【1311】 设函数 $f(x)$于区间 $a\leqslant x<+\infty$中二阶可微，并且：

(1) $f(a)=A>0$； (2) $f'(a)<0$； (3) 当 $x>a$，$f''(x)\leqslant 0$.

证明：在区间$(a,+\infty)$内方程 $f(x)=0$ 有而且仅有一个实根.

证 由于 $f'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上连续且当 $a<x<+\infty$时 $f''(x)\leqslant 0$，故函数 $f'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的，于是，当 $a\leqslant x<+\infty$时，$f'(x)\leqslant f'(a)<0$；由此又知函数 $f(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的. 因此，在$(a,+\infty)$上至多有一点使 $f(x)=0$，即在$(a,+\infty)$上方程 $f(x)=0$ 至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a<x_0<+\infty$存在，使 $f(x_0)=0$. 考虑函数 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ $(a\leqslant x<+\infty)$，则

$$F'(x)=f'(x)-f'(a),\quad F''(x)=f''(x)\quad (a\leqslant x<+\infty).$$

于是，当 $a<x<+\infty$时 $F''(x)\leqslant 0$，从而 $F'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的，但 $F'(a)=0$，故当 $a\leqslant x<+\infty$时，$F'(x)\leqslant F'(a)=0$；由此又知 $F(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的，但$F(a)=0$，因此，当 $a\leqslant x<+\infty$时，恒有 $F(x)\leqslant F(a)=0$.

令 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，故 $x^*>a$. 显然，

$$F(x^*)=f(x^*)-f(a)-f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]=f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*)\leqslant 0$，故 $f(x^*)\leqslant 0$. 于是，根据连续函数的中间值定理，知必有 $a<x_0\leqslant x^*$ 存在，使 $f(x_0)=0$. 证毕.

注 上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$代表曲线 $y=f(x)$(它是凸的)上的纵坐标与在点$(a,f(a))$处的切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$上的纵坐标之差，点 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$即是此切线与 Ox 轴的交点(图 2.49).

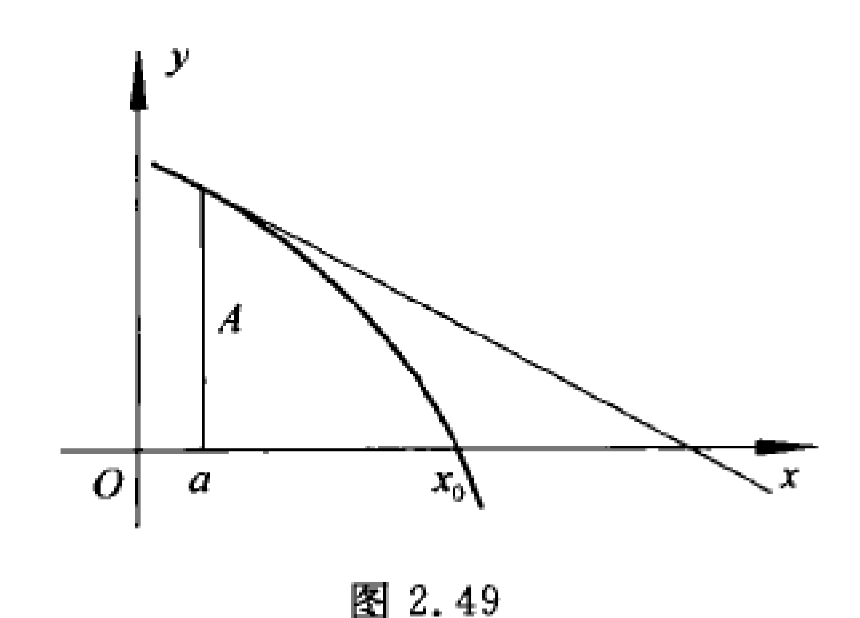


图 2.49

【1312】 若对于区间(a,b)内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2($\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$)有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地,相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)>\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上是凹(凸)的.

证明:函数 $f(x)$(1)若当 $a<x<b$ 时,$f''(x)>0$,则在(a,b)上是凹的;(2)若当 $a<x<b$ 时,$f''(x)<0$,则在(a,b)上是凸的.

证 证法 1:

设 x_1,x_2 为(a,b)中任意两点,$\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$. 不妨设 $x_1<x_2$. 于是,$a<x_1<x_2<b$. 考虑 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的函数$F(t)=f[(1-t)x_1+tx_2]-(1-t)f(x_1)-tf(x_2)$. 显然,

$$F(0)=f(x_1)-f(x_1)=0,\quad F(1)=f(x_2)-f(x_2)=0.$$

利用中值定理得知:当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$F'(t)=(x_2-x_1)f'[(1-t)x_1+tx_2]-[f(x_2)-f(x_1)]=(x_2-x_1)\{f'[(1-t)x_1+tx_2]-f'(c)\},$$

其中 $x_1<c<x_2$. 令 $t_0=\frac{c-x_1}{x_2-x_1}$,则 $0<t_0<1$ 且 $c=(1-t_0)x_1+t_0x_2$. 于是,$F'(t_0)=0$.

此外,当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,有 $F''(t)=(x_2-x_1)^2f''[(1-t)x_1+tx_2]$.

(1) 若 $f''(x)>0$ $(a<x<b)$. 由上式知 $F''(t)>0$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$,故 $F'(t)$在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上是递增的,再注意到 $F'(t_0)=0$,即知:当 $0\leqslant t<t_0$ 时 $F'(t)<0$;当 $t_0<t\leqslant 1$ 时. $F'(t)>0$. 由此又知:在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $F(t)$是递减的,在 $t_0\leqslant t\leqslant 1$ 上 $F(t)$是递增的. 由此,再用 $F(0)=0$,$F(1)=0$,即知:当 $0<t<1$ 时,恒有 $F(t)<0$. 特别 $F(\lambda_2)<0$. 但 $F(\lambda_2)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-\lambda_1f(x_1)-\lambda_2f(x_2)$,故

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$在(a,b)上是凹的.

(2) 若 $f''(x)<0(a<x<b)$,则 $F''(t)<0(0\leqslant t\leqslant 1)$. 和 (1)情形完全类似地可推知:当 $0<t<1$ 时,恒有$F(t)>0$. 特别 $F(\lambda_2)>0$,由此即知

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

故 $f(x)$在(a,b)上是凸的.

证法 2:

在(a,b)内任取两点 x_1 及 x_2,使 $a<x_1<x_2<b$,并令 $t=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$,则由 $\lambda_1>0$,$\lambda_2>0$,$\lambda_1+\lambda_2=1$ 知:$x_1<t<x_2$.

将函数 $f(x)$在 $x=t$ 点按 1266 题解附注的公式展开,得

$$f(x)=f(t)+(x-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x-t)^2f''(\xi),\tag{1'}$$

其中 $a<t<\xi<x$ 或 $a<x<\xi<t$. 将 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 代入(1′)式,得

$$f(x_1)=f(t)+(x_1-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x_1-t)^2f''(\xi_1),\tag{2'}$$

$$f(x_2)=f(t)+(x_2-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x_2-t)^2f''(\xi_2),\tag{3'}$$

其中 ξ_1,ξ_2 分别是界于 x_1,t 及 x_2,t 之间的数.以 λ_1 乘(2′)式,λ_2 乘(3′)式,再相加,得

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)=(\lambda_1+\lambda_2)f(t)+[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2-(\lambda_1+\lambda_2)t]f'(t)$$
$$+\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-t)^2 f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-t)^2 f''(\xi_2)].$$

但 $t=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$,及 $\lambda_1+\lambda_2=1$,故

$$[\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)]-f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-t)^2 f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-t)^2 f''(\xi_2)].$$

由于 $\lambda_1>0$,$\lambda_2>0$,$(x_1-t)^2>0$,$(x_2-t)^2>0$,所以,

$$[\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)]-f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$$

与 $f''(\xi_1)$、$f''(\xi_2)$ 有同样的正负号.

当 $f''(x)>0$ 时,则

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2),$$

所以,函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凹的.

当 $f''(x)<0$ 时,则

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)>\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2),$$

所以,函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸的.

【1313】 证明:函数 $x^n(n>1)$,e^x,$x\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的;而函数 $x^n(0<n<1)$,$\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

提示 利用 1312 题的结果.

证 (1) 设 $y=x^n(n>1)$,则 $y''=n(n-1)x^{n-2}$,它在 $(0,+\infty)$ 上是大于零的,因此,图像是凹的.

但当 $0<n<1$ 时,则 $y''<0$,故此时图像是凸的.

(2) 对于函数 e^x,其二阶导数为 e^x,它始终为正,因此,图像是凹的.

(3) 对于函数 $x\ln x$,其二阶导数为 $\frac{1}{x}$,它在 $(0,+\infty)$ 内大于零,因此,图像是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$,其二阶导数为 $-\frac{1}{x^2}$,它始终为负,因此,在 $(0,+\infty)$ 内图像是凸的.

【1314】 证明下列不等式,并解释其几何意义:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$,$(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ $(x>0,y>0)$.

证明思路 我们已知:若函数 $f(x)$ 图像在区间 (a,b) 内是凹的,则对于 (a,b) 中的任意两点 x 和 y,满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

分别令 $f(x)=x^n$,$(x>0,n>1)$,$f(x)=e^x(-\infty<x<+\infty)$ 及 $f(x)=x\ln x$ $(x>0)$,对它们利用 1313 题的结果,不等式即获证.

证 我们已知,若函数 $f(x)$ 的图像在区间 (a,b) 内是凹的,则对于 (a,b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是,利用 1313 题的结果,我们有:

(1) 设 $f(x)=x^n$,$(x>0,n>1)$,则其图像是凹的.于是,对于任意两点 x 和 y,得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 设 $f(x)=e^x$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 上图像是凹的.于是,对于任意两点 x 和 y,得

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(3) 设 $f(x)=x\ln x$,则对于 $x>0$ 图像是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y,得

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是:连接点$(x,f(x))$及$(y,f(y))$的弦的中点始终位于曲线上对应点(具有相同横坐标)的上方.

【1315】 证明:有界的凸函数处处连续,并有左导数及右导数.

证 设 $f(x)$在(a,b)内是凸的,并设 x_0 为(a,b)内的任一点,今证 $f(x)$在点 x_0 连续,且有左导数及右导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x-x_0|<\delta$,使得这邻域全部都包含在(a,b)内,并记

$$M=\min\{f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)\}.$$

设 $0<|x-x_0|<\delta$. 记 $t=\frac{|x-x_0|}{\delta}$,则 $0<t<1$.

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有 $x=t(x_0+\delta)+(1-t)x_0$ 及 $x_0=\frac{1}{1+t}x+\frac{t}{1+t}(x_0-\delta)$. 由于 $f(x)$为凸函数,故有

$$f(x)>tf(x_0+\delta)+(1-t)f(x_0)\geqslant tM+(1-t)f(x_0) \tag{1}$$

及

$$f(x_0)>\frac{1}{1+t}f(x)+\frac{t}{1+t}f(x_0-\delta)\geqslant\frac{f(x)+tM}{1+t}. \tag{2}$$

由(1),得 $$f(x)-f(x_0)>-t[f(x_0)-M];$$

由(2),得 $$t[f(x_0)-M]>f(x)-f(x_0).$$

从而,$f(x_0)-M>0$,且

$$|f(x)-f(x_0)|<t[f(x_0)-M]=\frac{[f(x_0)-M]}{\delta}\cdot|x-x_0|. \tag{3}$$

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,类似地也可导出(3)式,故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,(3)式恒成立. 由此显然有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$在点 x_0 的连续性.

记 $x=x_0+h$,则(3)式可改写为

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta}\ (0<|h|<\delta). \tag{4}$$

引进函数

$$\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)\quad(-\delta<h<\delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$仍为凸函数,且有 $\varphi(0)=0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2,设有 $0<t_1<t_2<\delta$,并改写为

$$t_1=\frac{t_1}{t_2}\cdot t_2+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质,有

$$\varphi(t_1)>\frac{t_1}{t_2}\cdot\varphi(t_2)+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0)=\frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1}>\frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t)=\frac{\varphi(t)}{t}$是一个减函数. 如从 $h\to+0$ 方向看,则函数 $F(h)$递增. 但由(4)可知 $|F(h)|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta}$,即 $F(h)$在 $0<|h|<\delta$ 有界,故极限 $\lim\limits_{h\to+0}F(h)$存在,也即 x_0 的右导数

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

存在.同理,可证左导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中,对于区间是否有限无关紧要.证毕.

注 本题不需假定凸函数有界,证明中也未用到有界这个条件,参看 E. C. Tichmarsh, The Theory of Functions, § 5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 作为凸函数的定义,则需加上凸函数有界这个条件,才能推出它连续并且左、右导数都存在.参看 G. Pólya, G. Szegø, Problems and Theorems in Analysis, Vol. Ⅰ ,70 题和 124 题.

【1316】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内二阶可微,且 $f''(\xi)\neq 0$,其中 $a<\xi<b$. 证明:在区间 (a,b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2,满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi)>0$. 考察 $f'(\xi)$,分两种情形:

(1)若 $f'(\xi)=0$,则由 $f''(\xi)>0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值.从而存在 $\delta>0$,在 $[-\delta+\xi,\xi+\delta](\subset(a,b))$ 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降,在 ξ 的右侧单调上升.如果 $f(-\delta+\xi)=f(\xi+\delta)$,则取 $x_1=-\delta+\xi$, $x_2=\xi+\delta$,就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta+\xi)<f(\xi+\delta)$,则取 $x_1=-\delta+\xi$,而在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi+\delta)$ 之间.由于 $f(x)$ 在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上单调上升,故存在 $x_2\in(\xi,\xi+\delta)$,使 $f(x_2)=f(x_1)$,从而题中的等式成立.如果 $f(-\delta+\xi)>f(\xi+\delta)$,仿前也可取得两点 x_1 及 x_2,使 $f(x_1)=f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2)若 $f'(\xi)\neq 0$,则设

$$F(x)=f(x)-f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0,$$

且

$$F''(\xi)=f''(\xi)>0.$$

对于函数 $F(x)$,应用上述(1)的推证方法,总存在两点 x_1 及 x_2,使 $F(x_1)=F(x_2)$,也即有

$$f(x_1)-f'(\xi)x_1=f(x_2)-f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

从而,命题得证.

【1317】 证明:若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内二阶可微,且

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ,满足

$$f''(\xi)=0.$$

证 用反证法,即若不存在 ξ,使 $f''(\xi)=0$,则当 $x>x_0$ 时,或者 $f''(x)>0$,或者 $f''(x)<0$. 如果不是这样,即若存在点 a 与 b,使得 $f''(a)<0$ 及 $f''(b)>0$,则由达布定理*) 可知,在 a 与 b 之间必有 c 存在,使得 $f''(c)=0$,这与我们的反证假设矛盾.因此,我们不妨设 $f''(x)>0$,从而,函数 $f(x)$ 的图像是凹的,且位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

与 $f(x)$ 的可微性,利用 1237 题的结果,即知:在 $(x_0,+\infty)$ 中至少存在一点 c_1,使

$$f'(c_1)=0.$$

由 $f''(x)>0$ 易知 $f'(x)$ 递增,从而,当 $x>c_1$ 时,$f'(x)>0$. 取 $c_2>c_1$,则 $f'(c_2)>0$.

过点$(c_2, f(c_2))$作曲线 $y=f(x)$的切线，其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty} Y(x)=+\infty,$$

而 $f(x)-Y(x)>0$，从而应有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

这与原设条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾. 同样，对于 $f''(x)<0$ 的情况也可推出以上结论.

于是，在区间$(x_0,+\infty)$内至少有一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

*） 达布定理指：若函数 $g(x)$在$[a,b]$内有有限的导数，且$g'(a)g'(b)<0$，则在(a,b)内至少有一点 c，使

$$g'(c)=0.$$

其证法是：不妨设 $g'(a)<0, g'(b)>0$，则在 a 右边且与 a 充分近的点 x，有$g(a)>g(x)$；在 b 左边且与 b 充分近的点 x，有 $g(x)<g(b)$；由此可知 $g(x)$在$[a,b]$上的最小值必在(a,b)内某点 c 达到，从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中，可设 $g(x)=f'(x)$，则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在，使 $g'(c)=0$，即$f''(c)=0$.

§9. 不定式的求值法

洛必达法则 情形 1：不定式$\frac{0}{0}$的求值法. 若：(1) 函数 $f(x)$与$g(x)$在点 a 的某邻域 U_ε内* 有定义并且连续(此处 a 为数或符号∞)，并且当 $x\to a$ 时，这两个函数都趋于零：

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0;$$

(2)导数 $f'(x)$与$g'(x)$在点 a 的邻域 U_ε 内存在(在点 a 本身可不存在)，并且当 $x\neq a$ 时，二者不同时为零；(3)有限或无穷的极限值$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

情形 2：不定式$\frac{\infty}{\infty}$的求值法. 若：(1) 当 $x\to a$ 时，函数$f(x)$与 $g(x)$都趋于无穷大：

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

其中 a 为有限数或符号∞；

(2) 对于异于 a 且属于点a 的邻域U_ε 的一切 x 值，导数 $f'(x)$与 $g'(x)$都存在，并且当 $x\in U_\varepsilon$ 及 $x\neq a$ 时，

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0;$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法，可使不定式 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 等的求值法化为

---

* 所谓点 a 的邻域 U_ε 系指满足下列不等式的数 x 的集合：

(1)$0<|x-a|<\varepsilon$，若 a 为一个数； (2) $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，若 a 为符号∞.

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

这两个基本类型的不定式的求值法.

求出下列各式之值：

【1318】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}\quad(b\neq 0)$.

【1319】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x+\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}=1$.

【1320】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2x}=2$.

【1321】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12\sec^2 4x-12\sec^2 x}{12\cos 4x-12\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\cos 4x+\cos x}{\cos^2x\cos^2 4x}\right)=-2$.

【1322】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2=3\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{3\sin 3x}\right)^2=\dfrac{1}{3}$.

【1323】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2x}{2x\tan x+x^2\sec^2x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2x}{x^2\tan^2x+2x\tan x+x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+2\dfrac{x}{\tan x}+\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$.

【1324】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\tan^2x}}\sec^2x}{4\sin x\cos x}=\dfrac{1}{3}$.

【1325】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x+xe^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x+e^x+xe^x}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

【1326】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{\sin t+t\cos t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\dfrac{t}{\sin t}\cos t}=\dfrac{1}{2}$.

【1327】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin2x-2\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left[\dfrac{4x}{(1-4x^2)^{\frac32}}-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac32}}\right]}{6x}$

$$=\frac13\lim_{x\to0}\left[\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac32}}-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac32}}\right]=1.$$

【1328】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{a}}{1+\dfrac{x}{a}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{b}}{1+\dfrac{x}{b}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\dfrac32\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{x+b}}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{a}{(x+a)^2}+\dfrac{b}{(x+b)^2}}{3}=\frac{a-b}{3ab}.$$

【1329】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a^x-a^{\sin x}\cos x)\ln a}{3x^2}=\dfrac{\ln a}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x\ln a+a^{\sin x}\sin x-a^{\sin x}\ln a\cos^2x}{2x}$

$$=\frac{\ln a}{6}\lim_{x\to0}(a^x\ln^2a+a^{\sin x}\cos x+a^{\sin x}\ln a\sin x\cos x+a^{\sin x}\ln a\sin2x-a^{\sin x}\ln^2a\cos^3x)=\frac{\ln a}{6}.$$

【1330】 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(\ln x+1)-1}{\dfrac1x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-2.$

【1331】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\sin bx\cos ax}{b\sin ax\cos bx}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}{}^{*)}=1.$

*） 利用 1318 题的结果.

【1332】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan ax}{b\tan bx}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\sec^2ax}{b\sec^2bx}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2.$

【1333】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\cos x\cdot\sin(\sin x)+\sin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\sin(\sin x)-\cos^2x\cos(\sin x)+\cos x}{12x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{24x}\left[\cos x\sin(\sin x)+\frac12\sin2x\cos(\sin x)+\sin2x\cos(\sin x)+\cos^3x\sin(\sin x)-\sin x\right]$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to0}\Big[-\sin x\sin(\sin x)+\cos^2x\cos(\sin x)+3\cos2x\cos(\sin x)-\frac32\cos x\sin2x\sin(\sin x)$$

$$-3\cos^2x\sin x\sin(\sin x)+\cos^4x\cos(\sin x)-\cos x\Big]$$

$$=\frac16.$$

【1334】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac1x\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac1x\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[-\dfrac{1}{\operatorname{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}+\dfrac{1}{\sin^2x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}^2x-\sin^2x}{\sin^2x\operatorname{sh}^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}2x-\sin2x}{\sin2x\operatorname{sh}^2x+\operatorname{sh}2x\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\text{ch}2x-\cos2x}{\cos2x\text{sh}^2x+\sin2x\text{sh}2x+\text{ch}2x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2\text{sh}2x+2\sin2x}{-2\sin2x\text{sh}^2x+3\cos2x\text{sh}2x+3\sin2x\text{ch}2x+2\text{sh}2x\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}(4\text{ch}2x+4\cos2x)(-4\cos2x\text{sh}^2x-2\sin2x\text{sh}2x-6\sin2x\text{sh}2x+6\cos2x\text{ch}2x+6\cos2x\text{ch}2x$$

$$+6\sin2x\text{sh}2x+4\text{ch}2x\sin^2x+2\sin2x\text{sh}2x)^{-1}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

【1335】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{arsh}(\text{sh}x)-\text{arsh}(\sin x)}{\text{sh}x-\sin x}$ 其中 $\text{arsh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{arsh}(\text{sh}x)-\text{arsh}(\sin x)}{\text{sh}x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\text{sh}x+\text{ch}x)-\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2x})}{\text{sh}x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\text{ch}x+\text{sh}x}{\text{sh}x+\text{ch}x}-\dfrac{\cos x+\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2x}}}{\sin x+\sqrt{1+\sin^2x}}}{\text{ch}x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2x}}}{\text{ch}x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\left(\dfrac{-\sin\sqrt{1+\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2x}}}{1+\sin^2x}\right)}{\text{sh}x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2\sin x}{(1+\sin^2x)^{\frac{3}{2}}}}{\text{sh}x+\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\cos x}{(1+\sin^2x)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{3\sin^2x\cos x}{(1+\sin^2x)^{\frac{5}{2}}}}{\text{ch}x+\cos x}=1.$$

【1336】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}=0.$

【1337】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,n>0)$.

解题思路 若 n 为正整数，利用洛必达法则求得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=0$. 若 n 不是正整数，则

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}}<\frac{x^n}{e^{ax}}<\frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}\quad(x>1),$$

利用上述结果及夹逼准则.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{ae^{ax}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{a^ne^{ax}}=0.$

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数，则$[n]<n<[n]+1$. 于是，

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}}<\frac{x^n}{e^{ax}}<\frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}\quad(x>1).$$

而左右两端当 $x\to+\infty$时，上面已证明它们的极限为零. 因此，中间的极限也为零. 于是，对于任意大于零的实数 a 和 n，均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=0$.

【1338】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

提示 利用 1337 题的结果.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{\frac{1}{x^2}\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{*)}{=}0.$

*) 利用 1337 题的结果.

【1339】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$.

提示 利用 1337 题的结果.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}}{}^{*)} = 0.$

*) 利用 1337 题的结果.

【1340】 $\lim\limits_{x\to1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$

解 $\lim\limits_{x\to1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim\limits_{x\to1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim\limits_{x\to1-0} \frac{x\ln^2 x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1-0} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{-1} = 0.$

【1341】 $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \ln x \quad (\varepsilon>0).$

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = -\lim\limits_{x\to+0} \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$

【1342】 $\lim\limits_{x\to+0} x^x.$

提示 注意 $x^x = e^{x\ln x}$，并利用 1341 题的结果.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^{0\,*)} = 1.$

*) 利用 1341 题的结果.

【1343】 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$

提示 利用 1341 题及 541 题的结果.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(x^x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}.$

由于

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0^{*)}, \quad \lim_{x\to+0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = 1 \quad 及 \quad \lim_{x\to+0}(x\ln^2 x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-2x\ln x) = 0,$$

故

$$\lim_{x\to+0}\{(e^{x\ln x}-1)\ln x\} = \lim_{x\to+0}\left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} \cdot x\ln^2 x\right\} = 1 \cdot 0 = 0.$$

于是，$\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^0 = 1.$

*) 利用 1341 题的结果.

【1344】 $\lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x}-1).$

提示 利用 1342 题的结果.

解 $\lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x}-1) = \lim\limits_{x\to+0} (e^{x^x\ln x}-1).$

利用 1342 题的结果，有 $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$，故得 $\lim\limits_{x\to+0} e^{x^x\ln x} = 0$，从而有 $\lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x}-1) = -1.$

【1345】 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$

解 由于 $\lim\limits_{x\to+0} \frac{k}{1+\ln x}\ln x = k \lim\limits_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k$，所以，$\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$

【1346】 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

解 由于 $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$，所以，$\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$

【1347】 $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}.$

解 由于 $$\lim_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

【1348】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 由于 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{-1}$.

【1349】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}$.

解 由于 $$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cot x}{\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\csc^2 x}{\cot x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}=e^0=1$.

【1350】 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln(\ln y)}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y\ln y}=0$，所以，$\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=e^0=1$.

【1351】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\tan\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+2x)^2}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{(1+2x)^3}}{\frac{2\pi}{(1+2x)^2}\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}=-4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+2x)\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}=0,$$

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

【1352】 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}$.

解 由于 $$\lim_{x\to a}\cot(x-a)\ln\left(\frac{\tan x}{\tan a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{\tan(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{\sec^2(x-a)}=\frac{2}{\sin 2a},$$

所以，$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}$ $\left(a\neq\frac{k\pi}{2}, k\text{ 为整数}\right)$.

【1353】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(a^x-1)\ln a}{a^x-x\ln a}-\frac{(b^x-1)\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{a^x\ln^2 a(a^x-x\ln a)-(a^x-1)^2\ln^2 a}{(a^x-x\ln a)^2}-\frac{b^x\ln^2 b(b^x-x\ln b)-(b^x-1)^2\ln^2 b}{(b^x-x\ln b)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b),$$

所以， $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{\ln^2a-\ln^2b}{2}}$.

【1354】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{e^x(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

【1355】 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)+x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+1+\ln x}=\dfrac{1}{2}$.

【1356】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=0$.

【1357】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{1+x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1+\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

【1358】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(a^x\ln a-ax^{a-1})=a^a(\ln a-1)$.

【1359】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=-e\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)^2}=-\frac{e}{2}.$$

【1360】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\quad(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\dfrac{x}{a+x}\right]-a^x\ln a}{2x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left\{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]^2+(a+x)^x\left[\frac{1}{a+x}+\frac{a}{(a+x)^2}\right]-a^x\ln^2a\right\}=\frac{1}{a}.$$

【1361】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2\arctan x}\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\arctan x}$$

$$=-\frac{2}{\pi},$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

【1362】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{th}x)^x$

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(\text{th}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\text{th}x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\text{th}x\,\text{ch}^2x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\text{sh}2x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\text{ch}2x}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\text{sh}2x}=0,$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{th}x)^x=e^0=1$.

【1363】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{\left(4x\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\arcsin x+2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{2(2-3x^2)\arcsin x+2x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\arcsin x+\frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{6},$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}$.

【1364】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$,

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

【1365】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

【1366】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\text{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x-\ln\operatorname{ch}x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x-\operatorname{th}x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sec^2x-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}{2}=-1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}$.

【1367】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th}x}{\operatorname{sh}x\left[\frac{1}{m}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{1}{n}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}=\frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{mn}{n-m}.$$

【1368】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{coth}x}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln2}{\operatorname{th}x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}=\frac{1}{2}$，所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{coth}x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

【1369】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

解 当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{3}+o(1),\ \sqrt{x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]=x+\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{2}+o(1),$$

$$\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln[e^x(1+xe^{-x})]=1+\frac{1}{x}\ln(1+xe^{-x})=1+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

（这是由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+xe^{-x})=0$）.

于是，

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\left[x+\frac{1}{3}+o(1)\right]-\left[x+\frac{1}{2}+o(1)\right]\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\left[x+\frac{1}{3}+o(1)\right]-\left[x+\frac{1}{2}+o(1)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\frac{1}{6}+o(1),$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{6}+o(1)\right]=-\frac{1}{6}.$$

【1370】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

解 当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}=e^{o\left(\frac{1}{x}\right)}=1+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

及

$$x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}=x^{-\frac{a}{x(x+a)}}=e^{-\frac{a}{x(x+a)}\ln x}=e^{o\left(\frac{1}{x}\right)}=1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}}\to1$，于是，得

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}=(x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}=(x+a)\cdot x^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x}}x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}$$

$$=x^{\frac{1}{x}}\left\{(x+a)\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=x^{\frac{1}{x}}\{[x+a+o(1)]-[x+o(1)]\}$$

$=x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)]$,

从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\{x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)]\}=a$.

【1371】 若当 $x\to0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)$ $[\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0]$，且在此有斜角 α，求

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x}.$$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\tan\alpha$ *).

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x=0$ 点有 $f'(0)=\tan\alpha$，注意到当 $x\to0$ 时，$f(x)\to0$，以及 $f'(0)$ 存在，如果再假定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，则也可用洛必达法则求得

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y'}{1}=f'(0)=\tan\alpha.$$

【1372】 若当 $x\to+0$ 时，连续曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)$ $[\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0]$，并且当 $0<x<\varepsilon$ 时，此曲线完全位于两直线 $y=-kx$ 及 $y=kx$ $(k\neq\infty)$ 所组成的锐角之内，证明：$\lim\limits_{x\to+0}x^{f(x)}=1$.

提示 注意到 $x\ln x\to0$ $(x\to+0)$，并利用夹逼准则.

证 当 $x\to+0$ 时，有 $x\ln x\to0$. 按题设应有

$$-kx\leqslant f(x)\leqslant kx\quad(k>0,\ 0<x<\varepsilon),$$

而当 $x>0$ 且很小时，有 $\ln x<0$，故

$$kx\ln x<f(x)\ln x<-kx\ln x,$$

从而有

$$e^{kx\ln x}<e^{f(x)\ln x}<e^{-kx\ln x}.$$

当 $x\to+0$ 时，不等式两端均趋于 $e^0=1$，注意到 $e^{f(x)\ln x}=x^{f(x)}$，即有 $\lim\limits_{x\to+0}x^{f(x)}=1$.

【1373】 证明：若函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在，则

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证明思路 注意到当 $h\to0$ 时，

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0\quad 及\quad h^2\to0,$$

且分子及分母（视为 h 的函数）都有导数，而分母的导数 $2h$ 又不为零（$h\to0$，但 $h\neq0$），故对 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ 可使用洛必达法则，得

$$原式=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}\qquad(*)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

注意 若对（*）式再使用洛必达法则，得原式 $=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}[f''(x+h)+f''(x-h)]$. 由于 $f''(x)$ 仅存在而没有假设连续，故无法获得 $f''(x)$ 的结果. 这一点必须引起读者的注意.

证 当 $h\to0$ 时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0$ 及 $h^2\to0$，且分子、分母（视为 h 的函数）都有导数，又注意到分母的导数 $2h\neq0$（$h\to0$ 但 $h\neq0$），故对 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ 可用洛必达法则，并且继续运算，最后得证

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

【1374】 研究运用洛必达法则于下列各例的可能性：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

提示 (1)及(2)洛必达法则不适用，但是原极限均存在.(3)及(4)不符合运用洛必达法则的条件，且原极限均不存在.

解 (1) 分子、分母分别求导数，得商为$\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$，

此函数当 $x\to 0$ 时，极限不存在，因此洛必达法则不能适用. 但是，原极限是存在的. 事实上，函数

$$\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ 及 $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$，于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$.

(2) 分子、分母分别求导数，得商为$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$，

当 $x\to\infty$时，上述函数的极限不存在，因此洛必达法则不能适用. 但是，原极限是存在的. 事实上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

(3) 如果运用洛必达法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的. 事实上，若取 $x_n=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=+\infty$. 对于数列$\{x_n\}$，原式的分母 $e^{-x_n}(\cos x_n+\sin x_n)=\sqrt{2}e^{-x_n}\cdot\sin\left(x_n+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-(n\pi+\frac{3\pi}{4})}\sin(n+1)\pi=0$，而分子不为零，此时原式的极限不存在，从而对于 $x\to+\infty$，原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时，虽然 $f(x)$及 $g(x)$均连续且极限为零，但其导数在数列 $x_n=n\pi(n=1,2,\cdots)$上两者同时出现了零点. 因此，一方面本题不符合运用洛必达法则的条件；另一方面也不允许在求极限过程中，用 $\sin x$ 作除数，上、下约分后再求极限.

(4) 如果运用洛必达法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x}[1+\cos 2x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}[2\cos^2 x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\sin x}\left[1+\dfrac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]}.$$

由于 $e^{\sin x}\geqslant e^{-1}$，　$x+\sin x\cos x\geqslant x-1$，故当 $x>1$ 时，有

$$\left|e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]\right|\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2|\cos x|}(x-1)-1\right]\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2}(x-1)-1\right]\to+\infty$$

(当 $x\to+\infty$时)，

从而得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}=0$.

这个结果是错误的. 事实上，对于不同的数列

$$x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad 及 \quad x_n'' = 2n\pi \quad (n=1,2,\cdots),$$

让 $n \to +\infty$，则分别取不同的极限$\frac{1}{e}$及 1，从而原极限是不存在的. 原因与(3)的情况类似，只是注意到 $\cos x$ 在 $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$的点列上($n=1,2,\cdots$)取值为零. 因此，本题不符合运用洛必达法则的条件；当然也不允许在中间过程里，用 $\cos x$ 作除数，上、下约分后再求极限.

【1375】 设有一弓形，其弦长为 b，拱高为 h，半径为 R，又有内接于此弓形的等腰三角形. 若当 R 不变时弓形的弧长趋于零，求弓形面积与内接三角形面积之比的极限. 利用所得结果推出弓形面积的近似公式：

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

提示 设弓形所张的中心角为 α，则内接等腰三角形面积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)，弓形面积为\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha).$$

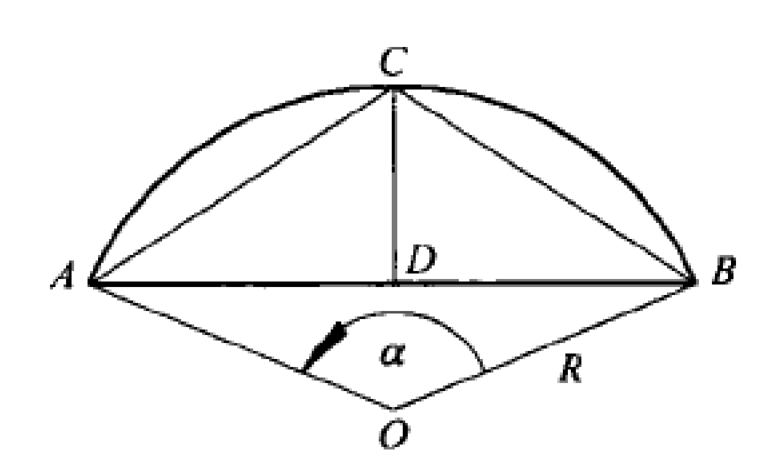
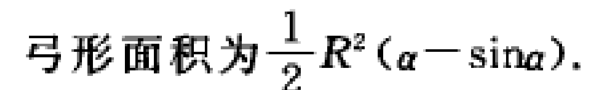


图 2.50

解 如图 2.50 所示. $AB=b$，$DC=h$，$\angle AOB=\alpha$，$\triangle ABC$ 为内接等腰三角形，其面积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$


弓形面积为$\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限为

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{4}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为 $S \approx \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh.$

§10. 泰勒公式

1° **泰勒局部公式** 若：(1)函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域$|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义；(2)在此邻域内有一直到$(n-1)$阶的导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$；(3)在点 x_0 存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \tag{1}$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,n)$. 特别地，当 $x_0=0$ 时，有：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o((x)^n). \tag{2}$$

在上述条件下，(1)式是唯一的.

若在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$，则公式(1)中的余项可以取为 $o^*((x-x_0)^{n+1})$的形式.

从泰勒局部公式(2)，得出下列 5 个重要的展开式：

Ⅰ. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$；

Ⅱ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$；

Ⅲ. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$；

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2° **泰勒公式** 若:(1)函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义;(2) $f(x)$ 在此闭区间上有连续的导数 $f'(x),\cdots,f^{n-1}(x)$;(3)当 $a<x<b$ 时,存在有限的导数 $f^{(n)}(x)$,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)\quad(\text{拉格朗日余项}),$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta_1(x-a)]}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n\quad(0<\theta_1<1)\quad(\text{柯西余项}).$$

【1376】 将多项式 $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 改写为二项式 $x+1$ 的非负整数次幂多项式.

解 $P'(x)=3+10x-6x^2$, $P'(-1)=-13$.

$P''(x)=10-12x$, $P''(-1)=22$.

$P'''(x)=-12$, $P'''(-1)=-12$.

$P^{(4)}(x)=0$, $P(-1)=5$.

按泰勒公式有

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+R_4(x),$$

这里 $R_4(x)=0$,即展开式中的余项为零,将上述结果代入,即得

$$P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式,至含有所指阶数的项为止:

【1377】 $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于什么?

解 $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=(1+x+x^2)\frac{(1+x)}{1+x^3}=(1+x)(1+x+x^2)\cdot[1-x^3+o(x^6)]$

$=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$.

$f^{(4)}(0)=4!\cdot(-2)=-48$.

【1378】 $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x)=\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$,则

$$f'(x)=\frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x)=\frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

而 $f(0)=1$, $f'(0)=60$, $f''(0)=3900$. 按泰勒公式就有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}=1+60x+1950x^2+o(x^2).$$

【1379】 $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x)=\sqrt[m]{a^m+x}$,则 $f'(x)=\frac{1}{m}(a^m+x)^{\frac{1-m}{m}}$, $f''(x)=\frac{(1-m)(a^m+x)^{\frac{1-2m}{m}}}{m^2}$,

而 $f(0)=a$, $f'(0)=\frac{1}{m}a^{1-m}$, $f''(0)=\frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}$. 于是,

$$\sqrt[m]{a^m+x}=a+\frac{x}{ma^{m-1}}+\frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}}+o(x^2).$$

【1380】 $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x)=3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}}$$
$$+\frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x)=3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$
$$-3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$
$$+\frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}-\frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

而

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=\frac{1}{3},\quad f'''(0)=6,$$

于是，

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

【1381】 e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

解 $$e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o(x^5)$$
$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

【1382】 $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时. 令 $\frac{e^x-1}{x}=1+\Delta$，则有

$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是，$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\Delta}=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4)$.

注意到

$$\Delta^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}+o(x^4),\quad \Delta^3=\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),\quad \Delta^4=\frac{x^4}{16}+o(x^4),$$

则得 $\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$.

【1383】 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

解 $$\sqrt[3]{\sin x^3}=\left[x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}+o(x^{15})\right]^{\frac{1}{3}}=x\left[1+\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)^2+o(x^{12})\right]$$
$$=x-\frac{7}{18}x^7-\frac{1}{3240}x^{13}+o(x^{13}).$$

【1384】 $\ln\cos x$ 到含 x^6 的项.

解 $\ln\cos x=\frac{1}{2}\ln(1-\sin^2x)=-\frac{1}{2}\left(\sin^2x+\frac{\sin^4x}{2}+\frac{\sin^6x}{3}+o(\sin^6x)\right)$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^4+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^6+o(x^6)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

其中用到：$\frac{\sin x}{x}\to1$（当 $x\to0$），故 $o(\sin^6x)$可换为 $o(x^6)$.

【1385】 $\sin(\sin x)$到含 x^3 的项.

解 $\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3x}{3!}+o(x^4)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3+o(x^4)$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).$$

【1386】 $\tan x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时，有

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6),\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=1-\Delta,$$

其中 $\Delta=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$很小，易见 $\Delta^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$. 于是，

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\frac{1}{1-\Delta}$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)(1+\Delta+\Delta^2+o(x^4))$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

【1387】 $\ln\frac{\sin x}{x}$到含 x^6 的项.

解 $\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)}{x}$

$$=\ln\left[1+\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^3+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6).$$

【1388】 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

解 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}.\quad f(1)=1,\quad f'(1)=\frac{1}{2},\quad f''(1)=-\frac{1}{4}.$

于是，$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.

【1389】 将函数 $f(x)=x^x-1$ 按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开到含有$(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x)=x^x(1+\ln x)$,

$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}$,

$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}(1+\ln x)+x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x}+\ln x\right)$.

而 $f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=2$, $f'''(1)=3$.

于是, $x^x-1=(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$.

【1390】 在点 $x=0$ 的邻域中,用抛物线(二次多项式)近似地代替函数 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

解 $y\Big|_{x=0}=a$, $y'\Big|_{x=0}=\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=0$, $y''\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}$.

于是, $a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)$.

【1391】 按分式 $\frac{1}{x}$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x(x>0)$ 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于
$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$
于是, $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-x=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

【1392】 求函数 $f(h)=\ln(x+h)(x>0)$ 按增量 h 的非负整数次幂的展开式,到含 h^n 的项(n 为正整数).

解 $\ln(x+h)=\ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\ln x+\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$.

【1393】 设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$ $(0<\theta<1)$,且 $f^{(n+1)}(x)\neq0$.

证明: $\lim\limits_{h\to0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

证明思路 将 $f(x+h)$ 展开到 h^{n+1},并与题设比较,可得
$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$
再利用高阶导数的定义即获证.

证 按题设,我们有
$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$
其中 $0<\theta<1$. 又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在,故
$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$
比较上面两式,得
$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$
从而有
$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$
由于 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq0$,故由上式知 $\lim\limits_{h\to0}\theta$ 存在,并且
$$\lim_{h\to0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

【1394】 估计下列近似公式的绝对误差:

(1) $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, 当 $0\leqslant x\leqslant1$;　(2) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, 当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$;

(3) $\tan x\approx x+\frac{x^3}{3}$, 当 $|x|\leqslant0.1$;　(4) $\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, 当 $0\leqslant x\leqslant1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差：

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

(1) 由 $f(x)=e^x$ 及 $0\leqslant x\leqslant 1$，得

$$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}<e.$$

于是，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

(2) 由 $f(x)=\sin x$，得

$$|f^{(5)}(\theta x)|=\left|\sin\left(\theta x+\frac{5}{2}\pi\right)\right|\leqslant 1.$$

于是，当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$|R_4(x)|\leqslant\frac{1}{5!}|x|^5\leqslant\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{3840}.$$

(3) 由 $f(x)=\tan x$，得

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x)=\frac{6}{\cos^4 x}-\frac{4}{\cos^2 x},\qquad f^{(4)}(x)=\frac{24\sin x}{\cos^5 x}-\frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},\qquad f^{(6)}(x)=\frac{32\sin x}{\cos^3 x}+\frac{240\sin x}{\cos^5 x}+\frac{720\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$ 是偶函数，又当 $0\leqslant x\leqslant 0.1$ 时，$f^{(6)}(x)\geqslant 0$，所以，$f^{(5)}(x)$ 在 $x=\pm 0.1$ 处达到最大值，注意到

$$f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{(4)}(0)=0,$$

及

$$\cos^2 0.1=1-\sin^2 0.1>0.9,\quad |f^{(5)}(x)|\leqslant\frac{16}{0.9}+\frac{120\times 0.1^2}{0.9^3}<20.$$

于是，

$$|R_5(x)|\leqslant\frac{0.1^5}{5!}\times 20<2\times 10^{-6}.$$

(4) 由 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 及 $0\leqslant x\leqslant 1$，得

$$|f'''(x)|=\frac{3}{8}\left|\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right|\leqslant\frac{3}{8}.$$

于是，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|R_3(x)|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{1}{16}.$$

【1395】 近似公式 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$ 对于怎样的 x 精确到 0.0001.

解 误差 $\Delta\leqslant\frac{|x|^4}{4!}$. 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!}<0.0001$，于是，$|x|<0.22134$(弧)$=12°41'$.

【1396】 利用泰勒公式近似地计算并估计误差：

(1) $\sqrt[3]{30}$； (2) $\sqrt[5]{250}$； (3) $\sqrt[12]{4000}$；

(4) $\sqrt{e}$； (5) $\sin 18°$； (6) $\ln 1.2$；

(7) $\arctan 0.8$； (8) $\arcsin 0.45$； (9) $(1.1)^{1.2}$.

解 (1) $\sqrt[3]{30}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]\approx 3.1070$；

$$\Delta<3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3\approx2.54\times10^{-4}.$$

(2) $\sqrt[5]{250}=3\left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}\approx3\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right]\approx3.0171$;

$$\Delta<3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3\approx3.45\times10^{-6}.$$

(3) $\sqrt[12]{4000}=2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}\approx2\left(1-\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{128}\right)\approx1.9960$;

$$\Delta<\left(\frac{3}{128}\right)^2\frac{1}{1-\frac{3}{128}}\approx5.625\times10^{-4}.$$

(4) $\sqrt{e}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx1.64872$;

$$\Delta=\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{8!}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots<\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}\approx1.7\times10^{-6}.$$

(5) $\sin18°\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx0.309017$,

$$\Delta<\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7\approx6\times10^{-8}.$$

(6) $\ln1.2=\ln(1+0.2)\approx0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\frac{1}{5}(0.2)^5-\frac{1}{6}(0.2)^6+\frac{1}{7}(0.2)^7$

≈0.182322;

$$\Delta<\frac{1}{8}(0.2)^8\approx3.2\times10^{-7}.$$

(7) $\arctan0.8\approx0.8-\frac{1}{3}(0.8)^3+\frac{1}{5}(0.8)^5-\frac{1}{7}(0.8)^7+\cdots-\frac{1}{39}(0.8)^{39}\approx0.67474(\text{弧})\approx38°39'35''$;

$$\Delta<\frac{1}{41}(0.8)^{41}\approx2.6\times10^{-6}.$$

(8) $\arcsin0.45\approx0.45+\frac{1}{2\cdot3}(0.45)^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}(0.45)^5+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot13}(0.45)^{13}$

$\approx0.46676(\text{弧})\approx26°44'37''$;

$$\Delta=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot15}(0.45)^{15}+\frac{1\cdot3\cdots15}{2\cdot4\cdots16\cdot17}(0.45)^{17}+\cdots$$

$$<\frac{1}{15}(0.45)^{15}[1+(0.45)^2+\cdots]<\frac{1}{15}(0.45)^{15}\cdot\frac{1}{1-(0.45)^2}\approx5.26\times10^{-7}.$$

(9) 事实上，只要计算 ln1.1.

$$\ln1.1=\ln(1+0.1)=0.1-\frac{(0.1)^2}{2}+\cdots+\frac{(0.1)^5}{5}\approx0.0953.$$

取五项，所以$(1.1)^{1.2}=e^{1.2\ln1.1}\approx e^{1.2\times0.0953}\approx1.12117$;

$$\Delta=\frac{1}{4!}e^{1.2\times0.0953\theta}(0.0953\times1.2)^4<7.9\times10^{-6}.$$

【1397】 计算：

(1) e 精确到 10^{-9}；(2) sin1° 精确到 10^{-8}；(3) cos9° 精确到 10^{-5}；

(4) $\sqrt{5}$ 精确到 10^{-4}；(5) lg11 精确到 10^{-5}.

解 (1) $\Delta=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\cdots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}$.

要 $\Delta<10^{-9}$，只要 $n!n>10^9$，即只要 $n\geqslant 11$. 于是，

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}\approx 2.718281828.$$

(2) $\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}$.

要 $\Delta<10^{-8}$，只要 $\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}<10^{-8}$，即只要 $n\geqslant 3$. 于是，

$$\sin 1^\circ\approx\frac{\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\approx 0.01745241.$$

(3) $\Delta<\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n}$.

要 $\Delta<10^{-5}$，只要 $\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n}<10^{-5}$，即只要 $n\geqslant 3$. 于是，

$$\cos 9^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4\approx 0.98769.$$

(4) $\sqrt{5}=2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，　$\Delta<\frac{2\cdot(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

要 $\Delta<10^{-4}$，只要 $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}<10^{-4}$，即只要 $n\geqslant 4$. 于是，

$$\sqrt{5}\approx 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1\cdot 1}{2!\cdot 2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]\approx 2.2361.$$

(5) $\lg 11=1+\lg(1+0.1)$，　$\Delta<\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}$.

要 $\Delta<10^{-5}$，只要 $\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}<10^{-5}$，即只要 $n\geqslant 4$. 于是，

$$\lg 11\approx 1+\left[0.1-\frac{1}{2}(0.1)^2+\frac{1}{3}(0.1)^3-\frac{1}{4}(0.1)^4\right]\cdot\frac{1}{\ln 10}\approx 1.04139.$$

利用展开式 Ⅰ～Ⅴ，求下列极限：

【1398】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

【1399】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right]\cdot\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

【1400】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-2\right)\right]$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\frac{1}{4}.$$

【1401】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

【1402】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

【1403】 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x-a^{-x}-2}{x^2}\quad(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x-a^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\left[(1+x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2))+(1-x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2))-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}[\ln^2a+o(1)]=\ln^2a\quad(a>0).$$

【1404】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$

【1405】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3!}x+o(x^4)}{1+o(x^2)}=0.$

【1406】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o(x^3)\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{3}+o(x^2)\right]=\frac{1}{3}.$

当 $x\to0$ 时,求出无穷小量 y 的形如 Cx^n(C 为常数)的主项,设:

【1407】 $y=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

解 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad \tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+\cdots.$

从而,

$$y=\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3x+\frac{2}{15}\sin^5x+\frac{1}{35}\sin^7x+o(\sin^7x)\right)$$

$$-\left(\tan x-\frac{1}{3!}\tan^3x+\frac{1}{5!}\tan^5x-\frac{1}{7!}\tan^7x+o(\tan^7x)\right)$$

$$=\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^5+\frac{1}{35}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)^7\right]$$

$$-\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)^5-\frac{1}{7!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)^7+o(x^7)\right]$$
$$=\frac{x^7}{30}+o(x^7),$$

故 y 的主项为$\frac{x^7}{30}$.

【1408】 $y=(1+x)^x-1$

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}-1=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$

$$=1+\left[x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1=x^2+o(x^2),$$

故主项为 x^2.

【1409】 $y=1-\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

解 $y=1-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}=1-e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1}=1-e^{-\frac{x}{2}+o(x)}$

$$=1-\left[1+\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)+o\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right]=\frac{x}{2}+o(x),$$

故主项为$\frac{x}{2}$.

【1410】 当选择怎样的系数 a 与 b 时，量 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 对于 x 为 5 阶无穷小？

提示 将量 $x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$ 展开到 x^5.

解 $x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+o(x^6)\right]$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5).$$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小，当且仅当

$$\begin{cases}1-a-b=0,\\ \frac{a}{6}+\frac{2b}{3}=0.\end{cases}$$

解之，得 $a=\frac{4}{3}$， $b=-\frac{1}{3}$.

【1411】 假设 $|x|$ 为小量，推出下列各式的简单的近似公式：

(1) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$；　　(2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

(3) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$；　　(4) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.

解 (1) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}=\frac{1}{R^2}\left[1-\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2}\right]\approx\frac{1}{R^2}\left[1-1+\frac{2x}{R}\right]=\frac{2x}{R^3}$；

(2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}\approx\left[1+\frac{2x}{3(1-x)}\right]-\left[1-\frac{2x}{3(1+x)}\right]$

$$=\frac{4x}{3(1-x^2)}\approx\frac{4}{3}x;$$

(3) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]\approx\frac{A}{x}\left[1-\left(1-\frac{nx}{100}\right)\right]=\frac{nA}{100}$；

(4) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}=\frac{\ln 2}{\frac{x}{100}-\frac{x^2}{20000}+\cdots}\approx\frac{\ln 2}{\frac{x}{100}}=\frac{100\ln 2}{x}\approx\frac{70}{x}$.

【1412】 假设 x 的绝对值为小量，推出形如 $x=\alpha\sin x+\beta\tan x$ 且精确到 x^5 项的近似公式.应用此公式近似地求小角度的弧长.

提示 仿 1410 题的解法.

解 $x=\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]+\beta\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right]$

$$=(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3+\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5),$$

所以

$$(1-\alpha-\beta)x+\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3-\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5)=0.$$

要此近似公式精确到 x^5 项，当且仅当 $\begin{cases}1-\alpha-\beta=0,\\ \frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}=0.\end{cases}$ 解之，得 $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$.

于是，近似公式为 $$x\approx\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x;$$

弧长＝中心角×半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长 $=Rx\approx\frac{2R}{3}\sin x+\frac{R}{3}\tan x$，此即小角度的弧长的近似公式.

【1413】 估计下面的**切比雪夫法则**的相对误差：圆弧长近似地等于以此弧的弦为底，以其拱高的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 为高的等腰三角形两腰的和.

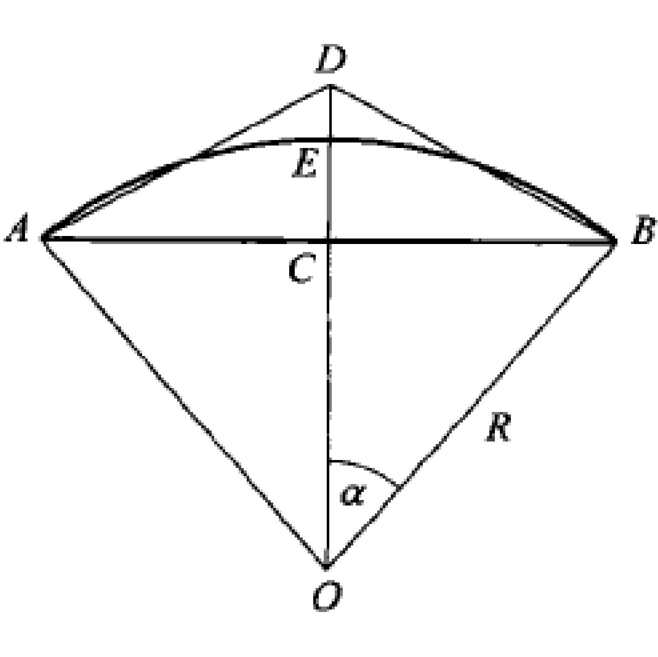


图 2.51

解 如图 2.51 所示

$$BC=R\sin\alpha,\quad BC^2=R^2\sin^2\alpha=\frac{R^2}{2}(1-\cos2\alpha),$$

$$DC=\sqrt{\frac{4}{3}}EC=\sqrt{\frac{4}{3}}R(1-\cos\alpha),$$

$$DC^2=\frac{4}{3}R^2(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)=R^2\left(2-\frac{8}{3}\cos\alpha+\frac{2}{3}\cos2\alpha\right).$$

于是，

$$BD^2=BC^2+DC^2=R^2\left(\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\cos\alpha+\frac{1}{6}\cos2\alpha\right)$$

$$=R^2\left\{\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{24}\alpha^4-\frac{1}{720}\alpha^6\right)+\frac{1}{6}\left(1-2\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^4-\frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\}+o(\alpha^7)$$

$$=R^2\left(\alpha^2-\frac{1}{90}\alpha^6\right)+o(\alpha^7)=R^2\alpha^2\left[1-\frac{1}{90}\alpha^4+o(\alpha^5)\right]=R^2\alpha^2[1-\Delta],$$

其中 $\Delta=\frac{1}{90}\alpha^4+o(\alpha^5)$.

$$BD=R\alpha\sqrt{1-\Delta}=R\alpha\left[1-\frac{1}{2}\Delta+o(\Delta^2)\right]=R\alpha\left[1-\frac{1}{180}\alpha^4+(\alpha^5)\right],$$

从而得

$$|\overset{\frown}{BE}-BD|=\left|R\alpha-R\alpha\left[1-\frac{\alpha^4}{180}+o(\alpha^5)\right]\right|=\frac{\alpha^5}{180}R+o(\alpha^6).$$

因此，所求的相对误差为

$$\left|\frac{\overset{\frown}{AB}-(AD+DB)}{\overset{\frown}{AB}}\right|=\left|\frac{2\overset{\frown}{BE}-2BD}{2\overset{\frown}{BE}}\right|=\frac{|\overset{\frown}{BE}-BD|}{|\overset{\frown}{BE}|}=\frac{\frac{\alpha^5}{180}R+o(\alpha^6)}{\alpha R}=\frac{\alpha^4}{180}+o(\alpha^5).$$

可见 α 愈小，相对误差就愈小，就愈精确.

§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° **极值存在的必要条件** 若函数在点 x_0 的双侧邻域中有定义，并且对于某区域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内的一切点 x，下列不等式分别成立：

$$f(x)<f(x_0) \quad 或 \quad f(x)>f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有**极值**(**极大值或极小值**). 在有极值的点导数 $f'(x_0)=0$ (若它存在).

2° **极值存在的充分条件**

第一法则：若

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有定义并且是连续的，且在点 x_0，导数 $f'(x_0)=0$ 或不存在(临界点)；

(2) $f(x)$ 在区域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有有限的导数 $f'(x)$；

(3)导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质可用下表表示出来：

	导数的符号		结　论
	$x<x_0$	$x>x_0$	
Ⅰ	+	+	无极值
Ⅱ	+	−	极大值
Ⅲ	−	+	极小值
Ⅳ	−	−	无极值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$，并且在点 x_0 下列条件成立：

$$f'(x_0)=0 \quad 与 \quad f''(x_0)\neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，并且当 $f''(x_0)<0$ 时有极大值，当 $f''(x_0)>0$ 时有极小值.

第三法则：设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x-x_0|<\delta$ 内有导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$，在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$，并且

$$f^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=1,\cdots,n-1), \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

这时：(1)若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值，并且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时有极大值；当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时有极小值；(2)若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3° **绝对极值** 在闭区间 $[a,b]$ 上，连续函数 $f(x)$ 或者在其临界点(就是导数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点)达到最大(最小)值，或者在所给闭区间的端点 a 和 b 达到最大(最小)值.

研究下列函数的极值：

【1414】 $y=2+x-x^2$.

解 $y'=1-2x$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$. 由于 $y''=-2<0$，所以，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 y 取极大值

$$y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}.$$

【1415】 $y=(x-1)^3$.

解 由于 $y'=3(x-1)^2>0$(除 $x=1$ 外)，即函数始终上升，故函数 y 无极值.

【1416】 $y=(x-1)^4$.

解 $y'=4(x-1)^3$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 当 $x<1$ 时 $y'<0$，当 $x>1$ 时 $y'>0$，所以，函数 y 当 $x=1$ 时取极小值 $y=0$.

【1417】 $y=x^m(1-x)^n$ (m 及 n 为正整数)

解题思路 要区分下列四种情况：

(1)在 $x=0$ 处，若 m 为偶数.

(2)在 $x=0$ 处，若 m 为奇数.

(3)在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处，不论 m、n 是奇数还是偶数.

(4)在 $x=1$ 处，若 n 为偶数或若 n 为奇数.

解 $y'=x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$，由 $y'=0$ 得 $x=0$，$x=1$，$x=\frac{m}{m+n}$.

(1) 若 m 为偶数，则当 $0<x<\frac{m}{m+n}$ 时，$y'>0$，当 $x<0$ 时，$y'<0$，所以，函数 y 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$.

(2) 若 m 为奇数，则 y' 在 $x=0$ 邻近不变号，故无极值.

(3) 不论 m、n 是奇数还是偶数时，由于当 $0<x<\frac{m}{m+n}$ 时，$y'>0$，当 $\frac{m}{m+n}<x<1$ 时，$y'<0$，

所以，函数 y 在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处有极大值 $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

(4) 同理，容易得知：若 n 为偶数时，则当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$. 若 n 为奇数，则当 $x=1$ 时函数 y 无极值.

【1418】 $y=\cos x+\operatorname{ch}x$.

解 $y'=-\sin x+\operatorname{sh}x$，令 $y'=0$ 得 $x=0$. 由于

$$y''=-\cos x+\operatorname{ch}x, y''(0)=0, y'''=\sin x+\operatorname{sh}x, y'''(0)=0, y^{(4)}=\cos x+\operatorname{ch}x, y^{(4)}(0)=2>0,$$

所以，当 $x=0$ 时有极小值 $y=2$.

【1419】 $y=(x+1)^{10}\mathrm{e}^{-x}$.

解 $y'=\mathrm{e}^{-x}(x+1)^9(9-x)$，令 $y'=0$，得 $x=-1$ 或 $x=9$. 由于

当 $x<-1$ 时，$y'<0$，当 $-1<x<9$ 时，$y'>0$，当 $x>9$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=-1$ 时有极小值 $y=0$；当 $x=9$ 时有极大值 $y=10^{10}\mathrm{e}^{-9}\approx1234000$.

【1420】 $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$ （n 为正整数）.

提示 同 1417 题，要讨论 n 的奇偶性.

解 $y'=-\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-x}x^n$，令 $y'=0$ 得 $x=0$.

(1)若 n 为偶数，由于 $y'<0$（除 $x=0$ 外），故当 $x=0$ 时函数 y 无极值.

(2)若 n 为奇数，则当 $x<0$ 时，$y'>0$，当 $x>0$ 时，$y'<0$，所以，当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$.

【1421】 $y=|x|$.

提示 注意函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，因此，无法使用导数来求极值. 但可以直接从极值的定义出发，求得在 $x=0$ 处函数有极小值 $y=0$.

解 当 $x=0$ 时，得 $y=0$，又在 $x=0$ 的邻域内对于任意 $x\neq0$，恒有 $y=|x|>0$，所以，当 $x=0$ 时函数有极小值 $y=0$. 注意，$y'\big|_{x=0}$ 不存在.

【1422】 $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y'=\frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{3}$. 因为

当 $x<0$ 时，$y'>0$，当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，$y'>0$，当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$y'<0$，当 $x>1$ 时，$y'>0$，

所以，当 $x=0$ 时无极值；当 $x=\frac{1}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\approx0.529$；当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$.

【1423】 设 $$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x) \quad (n \text{ 为正整数}),$$
其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续，且 $\varphi(x_0)\neq0$. 研究此函数在点 $x=x_0$ 的极值.

解题思路 由于 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续且 $\varphi(x_0)\neq 0$，故在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(x_0)$ 同号，且 $f(x_0)=0$. 因此，$f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性及 $\varphi(x_0)$ 的符号有关. 为此，可直接从极值的定义出发，对 n 为奇数或偶数及 $\varphi(x_0)$ 的正负，分别求极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续且 $\varphi(x_0)\neq 0$，所以，$\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是，$f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性及 $\varphi(x_0)$ 的符号有关.

(1) 若 n 为奇数，则当 x 经过 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值变号，所以，在 $x=x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数，则 $(x-x_0)^n>0\ (x\neq x_0)$. 因而当 $\varphi(x_0)>0$ 时，则

$$f(x)>f(x_0)=0\quad (0<|x-x_0|<\delta),$$

所以，当 $x=x_0$ 时有极小值 $f(x_0)=0$.

当 $\varphi(x_0)<0$ 时，则

$$f(x)<f(x_0)=0\quad (0<|x-x_0|<\delta),$$

所以，当 $x=x_0$ 时有极大值 $f(x_0)=0$.

【1424】 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，$f'(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ 及 x_0 为函数 $f(x)$ 的临界点，即 $P_1(x_0)=0$，$Q(x_0)\neq 0$. 证明：$\operatorname{sgn}f''(x_0)=\operatorname{sgn}P'(x_0)$.

提示 容易求得 $f''(x_0)=\dfrac{P_1'(x_0)}{Q^2(x_0)}$，且注意 $Q^2(x_0)>0$，故有 $\operatorname{sgn}f''(x_0)=\operatorname{sgn}P'(x_0)$.

证 因为

$$f''(x)=\frac{P_1'(x)Q^2(x)-2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)}.$$

于是，

$$f''(x_0)=\frac{P_1'(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

由于 $Q^2(x_0)>0$，所以有 $\operatorname{sgn}f''(x_0)=\operatorname{sgn}P'(x_0)$.

【1425】 可否断定：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值，则在此点某充分小邻域内，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧递增，而在其右侧递减？

提示 不能断定. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

在点 $x=0$ 有极大值 $f(0)=2$，但在该点的充分小邻域内 $f(x)$ 为振荡的. 即时递增时递减.

解 不能断定. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)<0\quad (x\in(-\delta,\delta),\ x\neq 0)$.

所以，在点 $x=0$ 有极大值 $f(0)=2$. 易知

$$f'(x)=\cos\frac{1}{x}-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\quad (x\neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负，故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(即时递增时递减).

【1426】 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 有极小值，尽管 $f^{(n)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$.

作出此函数的图像.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0)=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad f''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

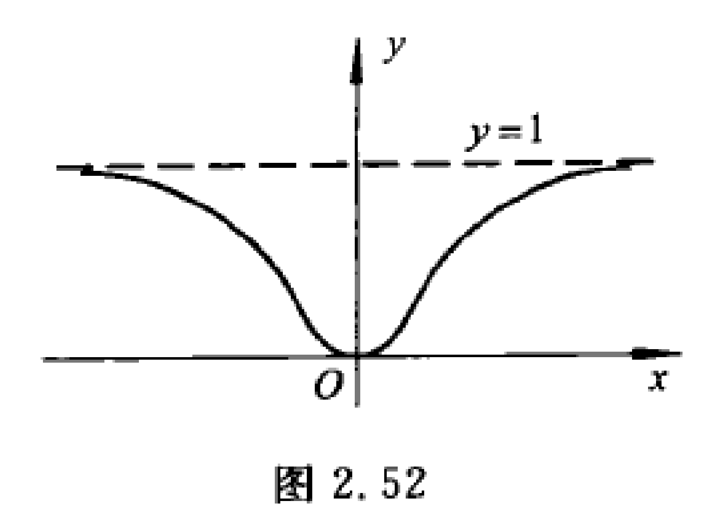


图 2.52

又当 x 经过点 $x=0$ $f'(x)$从负变到正,故 $f(0)=0$ 为极小值.

令 $f''(x)=0$ 解得拐点

$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

又由 $f(x)=f(-x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ 可知,$f(x)$为偶函数,$y=1$ 为渐近线(图 2.52).

【1427】 研究下列函数的极值并作出其图像:

(1) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解 由于 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$, $\left|\cos\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}}>0$,所以,对于(1)和(2)均有 $f(x)>f(0)$ $(x\neq 0)$,故当 $x=0$ 时这两个函数均有极小值 $f(0)=0$. 对于 $x\neq 0$,(1)和(2)均存在 $f'(x)$,但易知$f'(x)=0$ 无解,因而无其他极值.

它们的图像分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

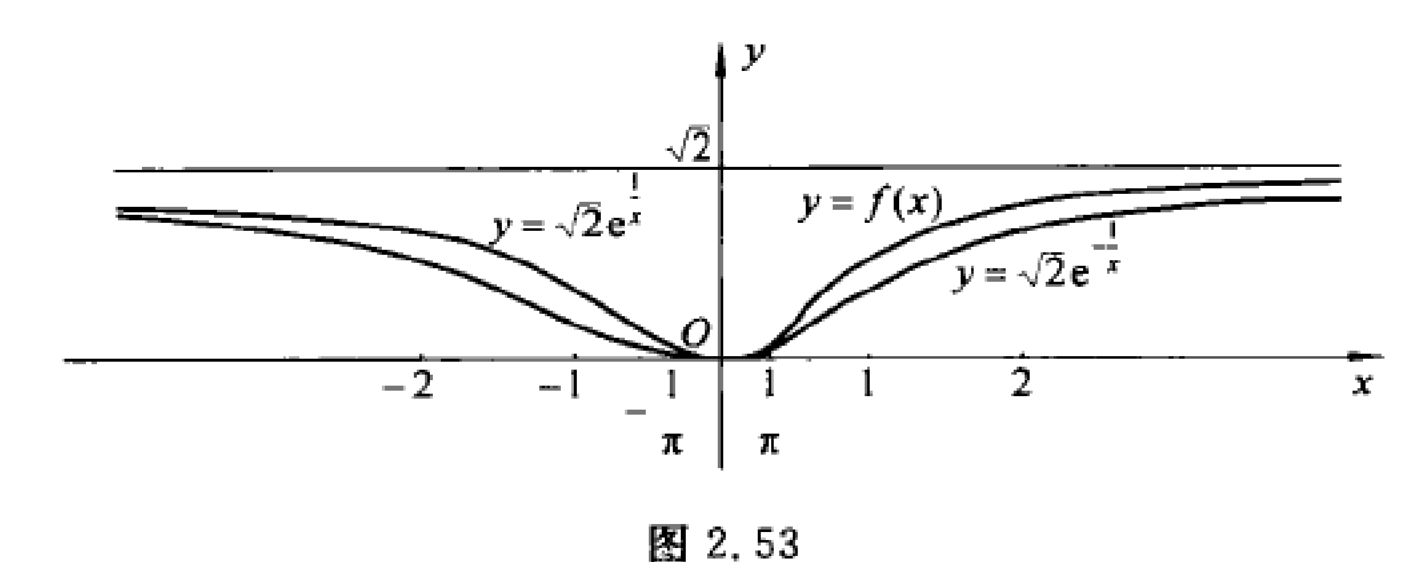


图 2.53

图 2.54

【1428】 研究函数

$$f(x)=\begin{cases} |x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的极值,并作出此函数的图像.

解 由于当 $x\neq 0$ 时,恒有 $f(x)>f(0)$,故当 $x=0$ 时函数有极小值 $f(0)=0$,其图像如图 2.55 所示.

它对称于 Oy 轴，又当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$.

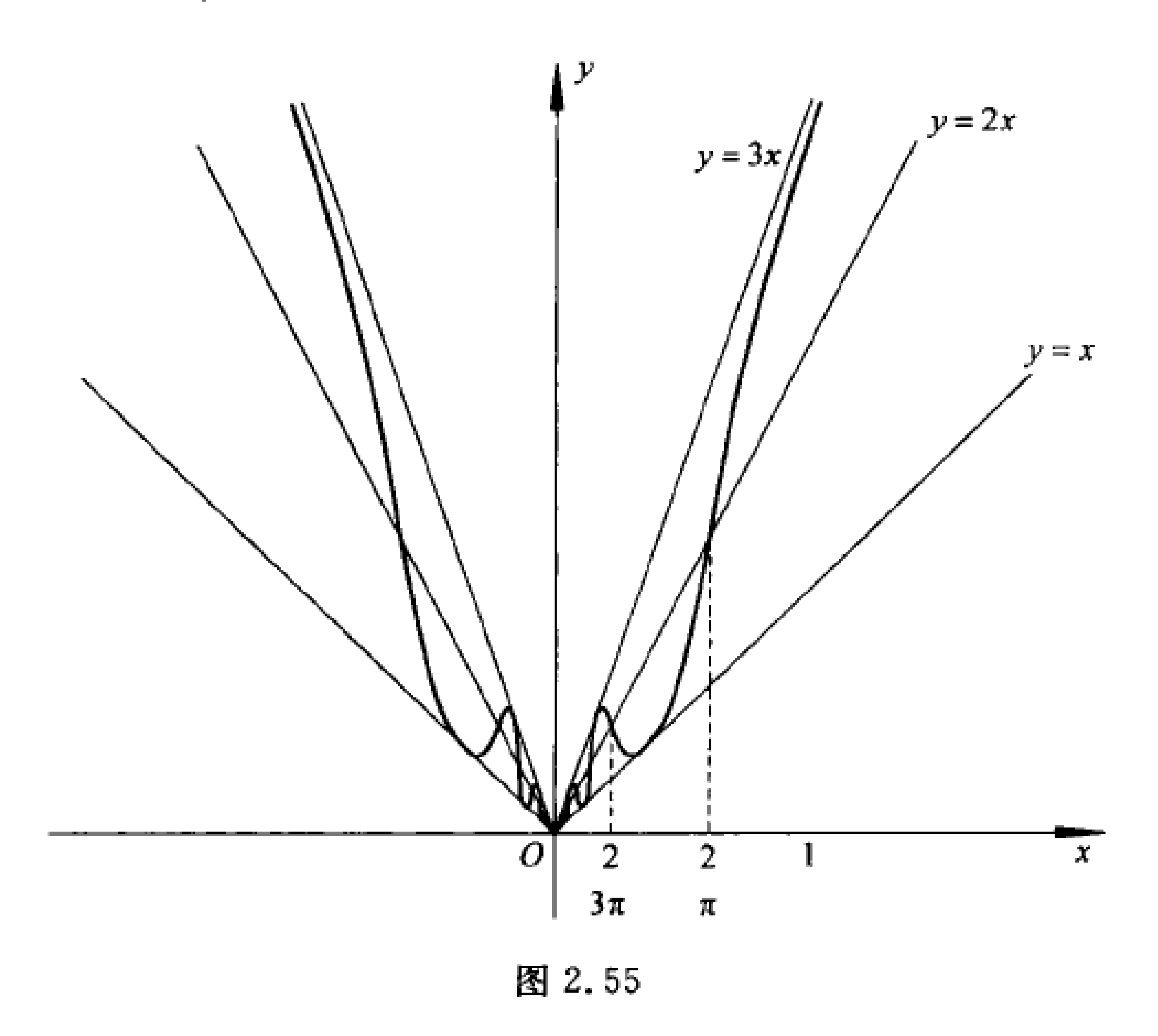


图 2.55

求下列函数的极值：

【1429】 $y=x^3-6x^2+9x-4$.

解 $y'=3x^2-12x+9$，令 $y'=0$ 得 $x=1$ 或 3.

因为 $y''=6x-12$，$y''(1)=-6<0$，$y''(3)=6>0$，

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1-6+9-4=0$；当 $x=3$ 时有极小值 $y=3^3-6\times 3^2+9\times 3-4=-4$.

【1430】 $y=2x^2-x^4$.

解 $y'=4x-4x^3$，令 $y'=0$ 得 $x=\pm 1$ 或 0.

因为 $y''=4-12x^2$，$y''(-1)=-8<0$，$y''(0)=4>0$，$y''(1)=-8<0$，

所以，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=1$；当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$；当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

【1431】 $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y'=(x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$. 令 $y'=0$ 得 $x=1,2$ 或 $\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.

因为当 $x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，当 $\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}<x<1$ 时，$y'>0$，当 $1<x<\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}<x<2$ 时，$y'>0$，当 $x>2$ 时，$y'>0$，

所以，

当 $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0.23$ 时有极小值 $y\approx -0.76$；当 $x=1$ 时有极大值 $y=0$；

当 $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1.43$ 时有极小值 $y\approx -0.05$；当 $x=2$ 时无极值.

【1432】 $y=x+\dfrac{1}{x}$.

解 $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=\pm 1$.

因为当 $x<-1$ 时，$y'>0$，当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$，当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，当 $x>1$ 时，$y'>0$，

所以，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-2$；当 $x=1$ 时有极小值 $y=2$.

【1433】 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$.

因为当 $x<-1$ 时，$y'<0$，当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$，当 $x>1$ 时，$y'<0$，
所以，当 $x=-1$ 时有极小值 $y=-1$；当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$

【1434】 $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

解 $y'=\frac{5x-7}{(x+1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{7}{5}$.

因为当 $-1<x<\frac{7}{5}$ 时，$y'<0$，当 $x>\frac{7}{5}$ 时，$y'>0$，所以，当 $x=\frac{7}{5}$ 时有极小值 $y=-\frac{1}{24}$.

【1435】 $y=\sqrt{2x-x^2}$.

解 $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时，$y'>0$，当 $1<x<2$ 时，$y'<0$，所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.
其次，由于函数 y 的值不为负数，故当 $x=0$ 及 $x=2$ 时，有边界的极小值 $y=0$.

【1436】 $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 $y'=\frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{3}{4}$.

因为当 $x<\frac{3}{4}$ 时，$y'<0$，当 $x>\frac{3}{4}$ 时，$y'>0$，所以，当 $x=\frac{3}{4}$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx-0.47$.

此外，对于 $y'\to\infty$ 的点也可能有极值，但在此题中，当 x 经过 1 时，导数不变号，故当 $x=1$ 时无极值.

【1437】 $y=xe^{-x}$

解 $y'=e^{-x}(1-x)$，令 $y'=0$ 得 $x=1$.

因为当 $x<1$ 时，$y'>0$，当 $x>1$ 时，$y'<0$，所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=e^{-1}\approx0.368$.

【1438】 $y=\sqrt{x}\ln x$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得 $x=e^{-2}$.

因为当 $0<x<e^{-2}$ 时，$y'<0$，当 $x>e^{-2}$ 时，$y'>0$，
所以，当 $x=e^{-2}\approx0.135$ 时有极小值 $y=-\frac{2}{e}\approx-0.736$.

又因当 $0<x<1$ 时，$y<0$，而 $y=\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x=0$，所以，当 $x=+0$ 时有边界的极大值 $y=0$.

【1439】 $y=\frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y'=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$ 或 e^2.

因为当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，当 $1<x<e^2$ 时，$y'>0$，当 $e^2<x<+\infty$ 时，$y'<0$，
所以，当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$；当 $x=e^2\approx7.389$ 时有极大值 $y=\frac{4}{e^2}\approx0.541$.

【1440】 $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

解 $y'=-\sin x(1+2\cos x)$，令 $y'=0$ 得 $x=k\pi$ 或 $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $y''=-\cos x-2\cos 2x$，$y''\Big|_{x=k\pi}=(-1)^{k+1}-2<0$，$y''\Big|_{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi}=\frac{1}{2}+1>0$.
所以，当 $x=k\pi$ 时有极大值 $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$；当 $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{4}$.

【1441】 $y=\frac{10}{1+\sin^2 x}$.

解　当 $x=k\pi$　$(k=0,\pm1,\cdots)$时，$\sin x=0$，所以，此时有极大值 $y=10$；

当 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$　$(k=0,\pm1,\cdots)$时，$|\sin x|=1$，所以，此时有极小值 $y=5$.

【1442】 $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解　$y'=\frac{1-x}{1+x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 因为当 $x<1$ 时，$y'>0$，当 $x>1$ 时，$y'<0$；

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0.439$.

【1443】 $y=e^x\sin x$.

解　$y'=e^x(\sin x+\cos x)$，令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$　$(k=0,\pm1,\cdots)$.

因为 $y''=2e^x\cos x$, $y''\Big|_{x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi}>0$, $y''\Big|_{x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi}<0$,

所以，当 $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$；当 $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ 时有极大值 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

【1444】 $y=|x|e^{-|x-1|}$.

解　当 $x<0$ 时，$y=-xe^{x-1}$，$y'=-(x+1)e^{x-1}$. 令 $y'=0$ 得 $x=-1$.

因为当 $x<-1$ 时，$y'>0$，当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$，所以，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$.

又当 $0<x<1$ 时，有

$$y=xe^{x-1},\quad y'=(x+1)e^{x-1}>0,$$

所以，当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$.

而当 $x>1$ 时，有

$$y=xe^{1-x},\quad y'=(1-x)e^{1-x}<0.$$

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数在所给闭区间上的最大值和最小值：

【1445】 $f(x)=2^x$，在闭区间$[-1,5]$上.

解　由于 $f'(x)=2^x\ln 2>0$，故 $f(x)=2^x$ 在$[-1,5]$上递增. 于是，它的最小值和最大值分别为

$$m=2^{-1}=\frac{1}{2}\quad 及\quad M=2^5=32.$$

【1446】 $f(x)=x^2-4x+6$，在闭区间$[-3,10]$上.

解　$f'(x)=2x-4$, $f''(x)=2$, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$.

由于 $f''(2)=2>0$，所以，当 $x=2$ 时有极小值 $f(2)=2$. 因为这是唯一的极小值，因此也就是最小值，即 $m=2$.

又由于 $f''(x)>0$，曲线呈凹状，所以在端点取得最大值，从而，$M=\max\{f(-3),f(10)\}=66$.

【1447】 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在闭区间$[-10,10]$上.

解　由于 $f(x)\geqslant 0$，故对于在区间$[-10,10]$上能使 $f(x)=0$ 的点取得最小值. 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1,2$. 即当 $x=1,2$ 时，函数取得最小值 $m=0$.

其次，$f'(x)=(2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-2x+3)$，当 $1<x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{3}{2}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，

所以，当 $x=\frac{3}{2}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4}$，于是，$M=\max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right),f(-10),f(10)\right\}=132$.

【1448】 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在闭区间$[0.01,100]$上.

提示　利用 1432 题的结果.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x=1$ 时有极小值 $f(1)=2$.

由于在此闭区间 $[0.01,100]$ 上 $f(1)$ 为唯一的极小值，因此也就是最小值，即 $m=2$.

其次，最大值 $M=\max\{f(0.01),f(100)\}=100.01$.

【1449】 $f(x)=\sqrt{5-4x}$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上.

解 $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{5-4x}}<0$.

因此，函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上递减，所以，最小值和最大值分别为 $m=f(1)=1$，$M=f(-1)=3$.

求下列函数在所给区间上的下确界(inf)与上确界(sup)：

【1450】 $f(x)=xe^{-0.01x}$，在区间 $(0,+\infty)$ 内.

解 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 于是，$\inf\{f(x)\}=0$.

其次，求极值判断得知，当 $x=100$ 时，函数 $f(x)$ 取极大值，并且是唯一的极值，即为最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\}=f(100)=\frac{100}{e}\approx36.8.$$

【1451】 $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内.

解题思路 利用 1420 题的结果可知，在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$ 递减，并注意 $f(0)=1$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

解 由 1420 题知，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(0)=1$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0,\quad \sup\{f(x)\}=1.$$

【1452】 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$，在区间 $(0,+\infty)$ 内.

解 $f(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 于是，$\inf\{f(x)\}=0$.

容易验证，当 $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值，并且只有一个极值，因而就是最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\}=f(\sqrt{\sqrt{2}-1})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx1.2.$$

【1453】 $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内.

解 可以求得，函数的最小值和最大值分别为

$$m=f\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx-0.067,\quad M=f(0)=1.$$

于是，

$$\inf\{f(x)\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx-0.067,\quad \sup\{f(x)\}=1.$$

【1454】 求函数 $f(\xi)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下确界与上确界，作出下列函数的图像：

$$m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty}f(\xi),\quad M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty}f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$，$f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值，又 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f(\xi)=0$，于是，

当 $-\infty<x\leqslant-3$ 时，$m(x)=f(-3)=\dfrac{1}{6}$， 当 $-3<x\leqslant-1$ 时，$m(x)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$，

当 $-1<x<+\infty$ 时，$m(x)=0$； 当 $-\infty<x\leqslant1$ 时，$M(x)=f(1)=\dfrac{1}{2}$，

当 $1<x<+\infty$ 时，$M(x)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$.

函数 $m(x)$ 及 $M(x)$ 的图像分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

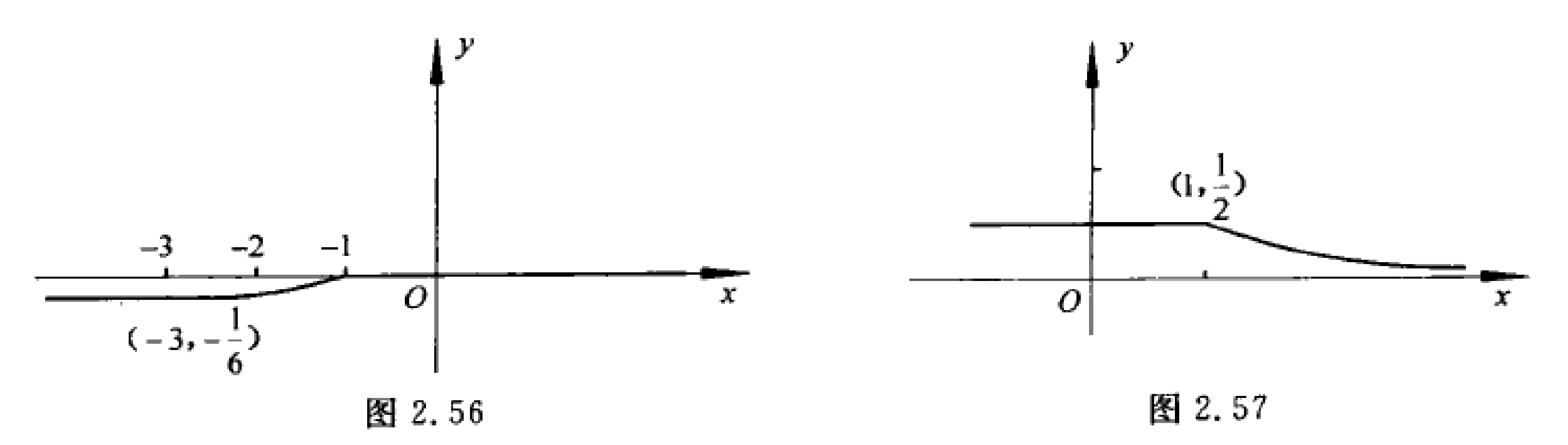


图 2.56　　　　图 2.57

【1455】 求以下各数列的最大项：

(1) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$； (2) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}$ $(n=1,2,\cdots)$； (3) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

解题思路 (1)经判断知，当 $x=\frac{10}{\ln 2}$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$ 有唯一的极大值.(2)经判断知，当 $x=10000$ 时，函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+10000}$ 有唯一的极大值.(3)经判断知，当 $x=\mathrm{e}$ 时，函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 有唯一的极大值.

解 (1) 经判断知，当 $x=\frac{10}{\ln 2}$时，$f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$有极大值，并且是唯一的极值.从而，最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}},\frac{N^{10}}{2^N},\frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N=\left[\frac{10}{\ln 2}\right]=14$. 于是，最大项为

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}},\frac{14^{10}}{2^{14}},\frac{15^{10}}{2^{15}}\right)=\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1.77\times 10^7.$$

(2) 经判断知，当 $x=10000$ 时 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+10000}$有极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项为

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right)=f(100000)=\frac{1}{200}.$$

(3) 经判断知，当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$有极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项为

$$\max(\sqrt[n]{n})=\max(\sqrt[3]{3},\sqrt{2})=\sqrt[3]{3}\approx 1.44.$$

【1456】 证明下列不等式：

(1) 当 $|x|\leqslant 2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$；

(2) 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $p>1$，则$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$；

(3) 当 $m>0$，$n>0$ 及 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$；

(4) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a$ $(x>0,\ a>0,\ n>1)$；

(5) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

证 (1) 设 $f(x)=3x-x^3$，经判断知，在 $|x|\leqslant 2$ 上，其最小值和最大值分别为 $m=f(-1)=-2$，$M=f(1)=2$. 而边界函数值为 $f(-2)=2$，$f(2)=-2$. 于是，$|3x-x^3|\leqslant 2$.

(2) 设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，经判断知，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$为$0\leqslant x\leqslant 1$ 上的唯一的极小值，而边界值 $f(0)=f(1)=1$，所以，$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

(3) 设 $f(x)=x^m(a-x)^n$，经判断知，$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$为 $0\leqslant x\leqslant a$ 上的唯一的极大值，所以，

$$x^m(a-x)^n \leqslant \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}.$$

(4) 设 $f(x)=\frac{(x^n+a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$，经判断知，$f(a)=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x>0$ 的唯一的极小值，而边界值 $f(+0)=f(+\infty)=1$，所以，

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \frac{(x^n+a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a} \leqslant 1.$$

由于 $x+a>0$，于是，$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n+a^n} \leqslant x+a$.

(5) $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以，恒有

$$|a\sin x+b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

【1457】 求多项式 $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$ 在闭区间 $[-2,1]$ 上"与零的偏差"，就是求

$$E_P=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

解 $P'(x)=2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令 $P'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，所以，

$$E_P=\max\left\{|P(-2)|,|P(1)|,\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|,\left|P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right|\right\}$$

$$=\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85.$$

【1458】 应当选择怎样的系数 q，使多项式 $P(x)=x^2+q$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上与零的偏差最小，即

$$E_P=\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=\min?$$

解 $P'(x)=2x$，令 $P'(x)=0$ 得 $x=0$，所以，

$$E_P=\max\{|P(0)|,|P(1)|,|P(-1)|\}=\max\{|q|,|1+q|\}.$$

当 $|q|=|1+q|$ 时，E_P 最小. 解之，得 $q=-\frac{1}{2}$.

【1459】 数 $\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$ 称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的**绝对偏差**.
求函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^3$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的绝对偏差.

解 由于 $f(x)-g(x)=x^2-x^3$，$f'(x)-g'(x)=2x-3x^2$，从而令 $f'(x)-g'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $\frac{2}{3}$.

又因 $f''(x)-g''(x)=2-6x$，$f''\left(\frac{2}{3}\right)-g''\left(\frac{2}{3}\right)=2-4=-2<0$，

所以，当 $x=\frac{2}{3}$ 时 $f(x)-g(x)$ 取极大值；又由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)-g(x)\geqslant 0$，所以，绝对偏差

$$\Delta=f\left(\frac{2}{3}\right)-g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}.$$

【1460】 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上用线性函数 $g(x)=(x_1+x_2)x+b$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$，使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对偏差（参阅上题）最小，并求此最小的绝对偏差.

解 由于

$$f(x)-g(x)=x^2-[(x_1+x_2)x+b],\quad f'(x)-g'(x)=2x-(x_1+x_2),$$

从而令 $f'(x)-g'(x)=0$，得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$. 又因

$$f''(x)-g''(x)=2>0,$$

故当 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 时，$f(x)-g(x)$ 取极小值. 于是，

$$\Delta=\max\left\{\left|f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|,|f(x_1)-g(x_1)|,|f(x_2)-g(x_2)|\right\}$$

$$=\max\left\{\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|,|b+x_1x_2|\right\}.$$

要 Δ 为最小，需

$$\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|=|b+x_1x_2|.$$

解之，得

$$b=-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2).$$

此时

$$g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2),$$

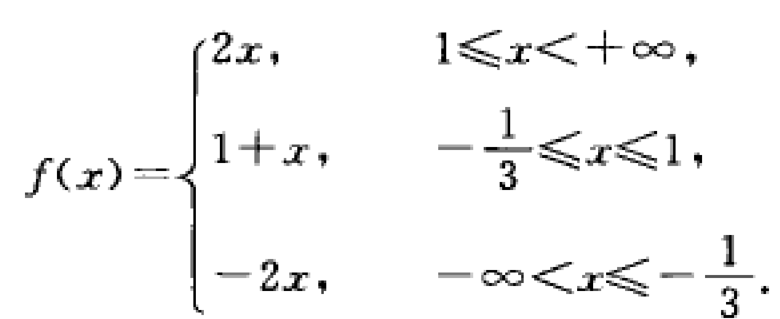
而最小的绝对偏差 $\Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$.

【1461】 求函数 $f(x)=\max\{2|x|,|1+x|\}$ 的极小值.

解题思路 先作函数 $y=2|x|$ 及 $y=|1+x|$ 的图像，并求得交点，由此即知

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 1\leqslant x<+\infty,\\ 1+x, & -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ -2x, & -\infty<x\leqslant-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

解 $y=2|x|$ 及 $y=|1+x|$ 的图像如图 2.58 所示，它们的交点是 $A\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 及 $B(1,2)$. 从而，



$$f(x)=\begin{cases}2x, & 1\leqslant x<+\infty,\\ 1+x, & -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ -2x, & -\infty<x\leqslant-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

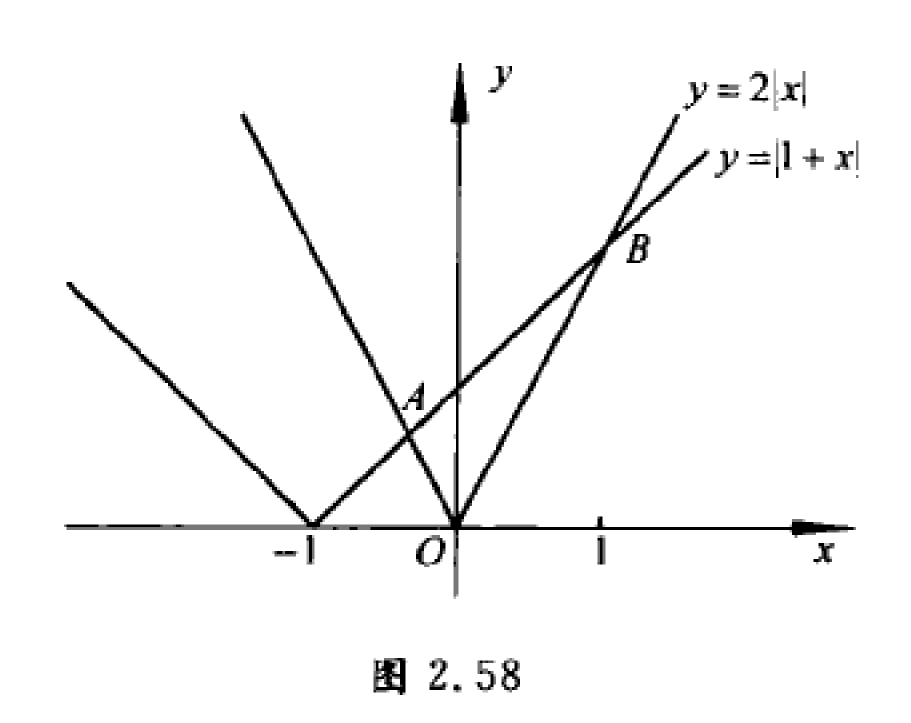


图 2.58

于是，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目，并划分出这些根所在的区间：

【1462】 $x^3-6x^2+9x-10=0$.

提示 利用函数的单调性.

解 设 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$，则 $f(x)$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且有

$$f'(x)=3x^2-12x+9.$$

令 $f'(x)=0$，得临界点*(也即驻点) $x=1$ 或 3.

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad f'(x)>0,\quad f(1)=-6<0,$$

故在区间 $(-\infty,1)$ 内方程无实根.

当 $x\in(1,3)$ 时，由于

$$f'(x)<0,\quad f(3)=-10<0,$$

* $f'(x)=0$ 的临界点也称为驻点.

《题解》作者注

故在(1,3)内也无实根.

当 $x\in(3,+\infty)$,由于

$$f'(x)>0,\quad f(3)=-10<0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故在$(3,+\infty)$内方程有且仅有一实根.

【1463】 $x^3-3x^2-9x+h=0$.

解题思路 令 $f(x)=x^3-3x^2-9x+h$,注意到在临界点 $x=-1$ 及 3 处,有 $f(-1)=5+h$,$f(3)=-27+h$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.分别就 $h<-5$,$-5<h<27$ 及 $h>27$ 加以讨论.

解 设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+h$,则 $f'(x)=3x^2-6x-9$.令 $f'(x)=0$,得临界点 $x=-1$ 或 3.

由于

$$f(-1)=5+h,\quad f(3)=-27+h,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故当 $h<-5$ 时,$f(-1)<0$,$f(3)<0$,且

$$f'(x)>0,x\in(-\infty,-1),\quad f'(x)<0,x\in(-1,3),\quad f'(x)>0,x\in(3,+\infty),$$

因此,有且仅有一实根位于$(3,+\infty)$内.

当$-5<h<27$ 时,$f(-1)>0$,$f(3)<0$,导数 $f'(x)$的符号变化同上,于是,有三个实根,分别位于$(-\infty,-1)$,$(-1,3)$及$(3,+\infty)$内.

当 $h>27$ 时,$f(3)>0$,$f(-1)>0$,因此,有且仅有一实根位于$(-\infty,-1)$内.

【1464】 $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

解 设 $f(x)=3x^4-4x^3-6x^2+12x-20$,则 $f'(x)=12x^3-12x^2-12x+12$.令 $f'(x)=0$,得临界点 $x=\pm1$.由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad f(-1)=-31<0,\quad f(1)=-15<0,$$

并且

$$f'(x)<0,\quad x\in(-\infty,-1),\qquad f'(x)>0,\quad x\in(-1,+\infty),$$

故有两实根,分别位于$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$内.

【1465】 $x^5-5x=a$.

解题思路 仿 1463 题的解法.

解 设 $f(x)=x^5-5x-a$,则 $f'(x)=5x^4-5$.令 $f'(x)=0$,得临界点 $x=\pm1$.由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$
$$f'(x)>0,\quad x\in(-\infty,-1),\quad x\in(1,+\infty),$$
$$f'(x)<0,\quad x\in(-1,1),$$
$$f(-1)=4-a,\quad f(1)=-4-a,$$

故 当 $a<-4$ 时,$f(-1)>0$,$f(1)>0$.因此,有且仅有一实根,位于$(-\infty,-1)$内;

当$-4<a<4$ 时,$f(-1)>0$,$f(1)<0$,此时有三个实根,分别位于$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$和$(1,+\infty)$内;

当 $a>4$ 时,$f(-1)<0$,$f(1)<0$.因此,有且仅有一实根位于$(1,+\infty)$内.

【1466】 $\ln x=kx$.

解题思路 当 $k=0$ 时,显然方程仅有一根 $x=1$.故不妨设 $k\neq0$.令 $f(x)=\ln x-kx$,求得临界点 $x=\frac{1}{k}$后,分别就$-\infty<k<0$,$0<k<\frac{1}{e}$及 $k>\frac{1}{e}$加以讨论.

解 当 $k=0$ 时,方程显然仅有一个根 $x=1$.因此,不妨设 $k\neq0$.令 $f(x)=\ln x-kx(x>0)$,则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-k.$$

令 $f'(x)=0$,得临界点 $x=\frac{1}{k}$.由于 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,故曲线的图像始终呈凸状.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$.又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当 $k>\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$，此时方程无根.

当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$，因此，方程有两个实根，分别位于 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内.

当 $-\infty<k<0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$f(1)=-k>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$，故此时方程有且仅有一实根位于 $(0,1)$ 内.

【1467】 $e^x=ax^2\quad(a>0)$.

解 对于函数 $f(x)=e^x-ax^2$，有 $f(0)=1>0$；又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，故总存在充分大的正数 x_0，使 $f(-x_0)<0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0,0)$ 中，从而在 $(-\infty,0)$ 中至少有 $f(x)=0$ 的一个实根. 而当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=e^x-2ax>0$，即函数递增. 因此，$f(x)=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时只有唯一的根.

对于 $x>0$ 的情况，为求方程 $e^x=ax^2$ 的根，只要求方程 $x=\ln a+2\ln x(a>0,x>0)$ 的根. 设

$$g(x)=x-\ln a-2\ln x,\quad 则有\quad g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}.$$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，所以，$g(2)=\ln\frac{e^2}{4a}$ 为极小值.

又因 $\lim\limits_{x\to+0}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，因此，

当 $g(2)>0$，即 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 无根.

当 $g(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有唯一的根.

当 $g(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有二个根，它们分别位于 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内.

综上所述，方程 $e^x=ax^2$ 根的情况如下：

当 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根，位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，有两个根，一根为 2，一根位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$ 时有三个根，分别位于 $(-\infty,0)$，$(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内.

【1468】 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\sin^3x\cos x=a$.

解 当 $a=0$ 时，方程显然有实根 $x=0,\frac{\pi}{2}$ 或 π. 因此，不妨设 $a\neq0$. 令 $f(x)=\sin^3x\cos x-a$，则

$$f'(x)=3\sin^2x\cos^2x-\sin^4x.$$

令 $f'(x)=0$，得临界点 $x=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,\quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,\quad f(0)=f(\pi)=-a,$$

并且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$.

于是，当 $|a|<\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程有两个实根位于 $(0,\pi)$ 内；当 $|a|>\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程无实根.

【1469】 $\operatorname{ch}x=kx$.

解 设 $f(x)=\operatorname{ch}x-kx$，则 $f'(x)=\operatorname{sh}x-k$. 令 $f'(x)=0$，得唯一临界点 x_0，它适合 $k=\operatorname{sh}x_0$.

由于 $f''(x)=\operatorname{ch}x>0$，故曲线图像呈凹状，且在 $x=x_0$ 达最小值. 显然 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，因此，我们只要考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0)=\operatorname{ch}x_0-kx_0=\operatorname{ch}x_0-x_0\operatorname{sh}x_0.$$

先设 $k>0$，于是 $x_0>0$. 引进辅助函数

$$g(x)=\mathrm{ch}x-x\mathrm{sh}x,$$

方程 $g(x)=0$，即 $\coth x=x$ 的（唯一）正根 $\xi\approx1.2^{*)}$. 由于

$$g'(x)=\mathrm{sh}x-\mathrm{sh}x-x\mathrm{ch}x=-x\mathrm{ch}x,$$

因此假如 $x>0$，则 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减.

若 $k>\mathrm{sh}\xi$，即 $\mathrm{sh}x_0>\mathrm{sh}\xi$，由于 $\mathrm{sh}x$ 是递增的，故必 $x_0>\xi$，从而有

$$f(x_0)=\mathrm{ch}x_0-x_0\mathrm{sh}x_0<\mathrm{ch}\xi-\xi\mathrm{sh}\xi=0.$$

因此，方程 $f(x)=0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi)=\mathrm{ch}\xi-k\xi<\mathrm{ch}\xi-\xi\mathrm{sh}\xi=0,\quad f(0)=1,$$

故两根分别位于 $(0,\xi)$ 及 $(\xi,+\infty)$ 内.

若 $k=\mathrm{sh}\xi$，则 $\mathrm{sh}x_0=\mathrm{sh}\xi$，从而，$x_0=\xi$. 因此，$f(x_0)=0$，此时方程 $f(x)=0$ 恰有一实根 x_0.

若 $0<k<\mathrm{sh}\xi$，则 $\mathrm{sh}x_0<\mathrm{sh}\xi$，从而 $x_0<\xi$. 因此，

$$f(x_0)=\mathrm{ch}x_0-x_0\mathrm{sh}x_0>\mathrm{ch}\xi-\xi\mathrm{sh}\xi=0,$$

故方程 $f(x)=0$ 无实根.

若 $k=0$，显然方程 $f(x)=0$ 无根.

若 $k>0$，则可令 $x=-t$. 于是，得 $\mathrm{ch}t=-kt\quad(-k>0)$.

通过按上述的方法讨论该方程的根，易知当 $\mathrm{sh}\xi<-k$ 时，原方程有两实根，分别位于 $(-\xi,0)$ 及 $(-\infty,-\xi)$ 内，其中 ξ 满足 $\coth\xi=\xi(\approx1.2)$. 而当 $-\mathrm{sh}\xi<k<0$ 时，方程无实根.

综上所述，若 $|k|>\mathrm{sh}\xi\approx1.50$，方程有两实根 x_1 及 x_2，满足 $0<|x_1|<\xi$, $\xi<|x_2|<+\infty$；若 $|k|=\mathrm{sh}\xi$，方程只有一个实根（$k=\mathrm{sh}\xi$ 时，根为 ξ，$k=-\mathrm{sh}\xi$ 时，根为 $-\xi$）；若 $|k|<\mathrm{sh}\xi$，则方程无实根.

*) 方程根的近似解法见本章 §15.

【1470】 在什么条件下方程 $x^3+px+q=0$ 有：(1) 一个实根；(2) 三个实根.

在平面 (p,q) 上画出相应的区域.

解 设 $f(x)=x^3+px+q$，则 $f'(x)=3x^2+p$. 若 $p\geqslant0$，则 $f'(x)>0(x\neq0)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是递增的，并且显然 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

若 $p<0$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$，$x_2=-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$. 在 $(-\infty,x_2]$ 和 $[x_1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 递增，在 $[x_2,x_1]$ 上 $f(x)$ 递减.

因此，若 $f(x_1)f(x_2)>0$，则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2)>0$，$f(x_1)<0$，则方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1)=-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

$$f(x_2)=\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

故 $f(x_1)f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

此即方程仅有一实根的条件（前面 $p\geqslant0$ 的情形可合并到此条件中去）.

而 $f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

此即方程有三实根的条件.

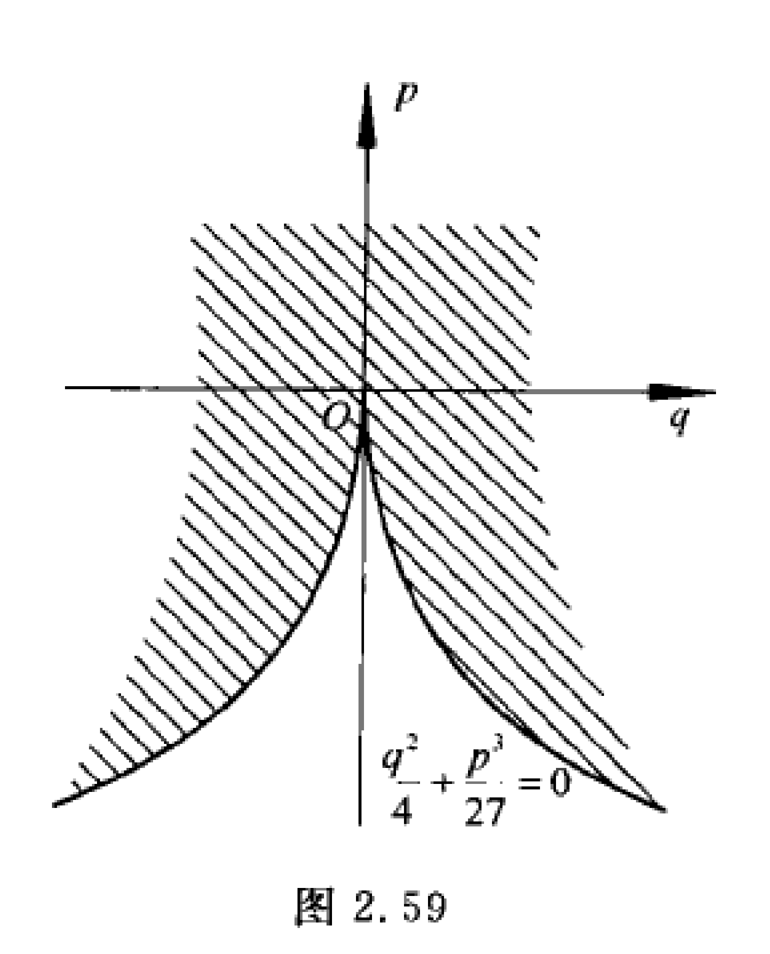


图 2.59

如图 2.59 所示，曲线 $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=0$ 的左右上方是方程仅有一实根的 (p,q) 域，以阴影表之；而曲线的下方则是方程有三实根的 (p,q) 域，以不具阴影表之.

§ 12.　依据函数的特征点作函数图像

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图像，必须：(1)确定此函数的存在域；并研究函数在其存在域边界点的性质；(2)查明图像的对称性和周期性；(3)求出函数的不连续点及连续的区间；(4)确定函数的零点及同号区间；(5)求出极值点并查明函数上升和下降的区间；(6)确定拐点及函数图像凹凸的区间；(7)若有渐近线存在则求出渐近线；(8)指出函数图像的各种特性.

作出下列函数的图像：

【1471】 $y=3x-x^3$.

解 $y'=3-3x^2$，令 $y'=0$ 得 $x=-1$ 或 1. $y''=-6x$，令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

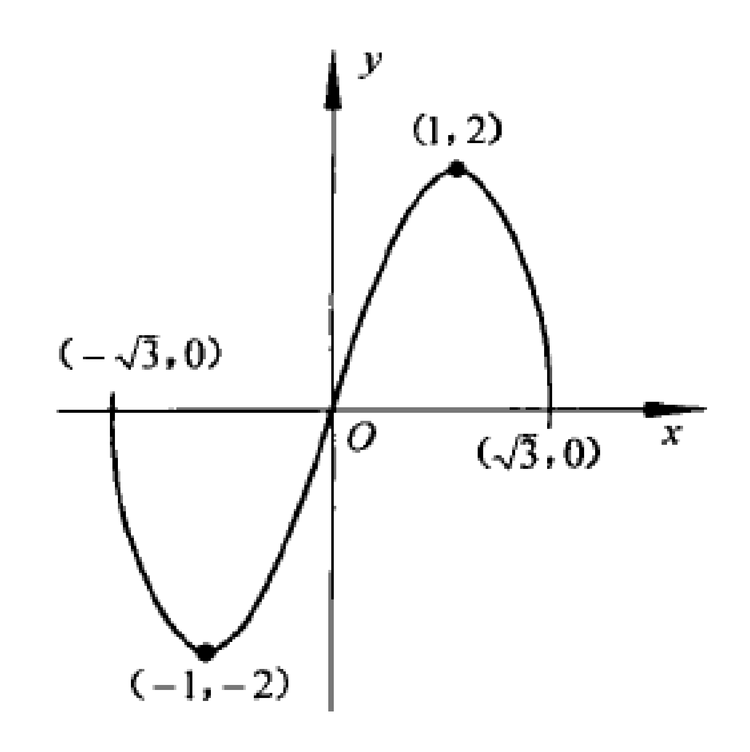


图 2.60

当 $x=-1$ 时，$y=-2$；$x=0$，$\pm\sqrt{3}$时，$y=0$；$x=1$ 时，$y=2$.
图像对称于原点，如图 2.60 所示.

【1472】 $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x，y 值不变，故图像对称于 Oy 轴.

零点处：$x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm1.65$.

$$y'=2x-2x^3\text{，令 }y'=0\text{ 得 }x=0\text{，或}\pm1.\ y''=2-6x^2\text{，令 }y''=0\text{ 得 }x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

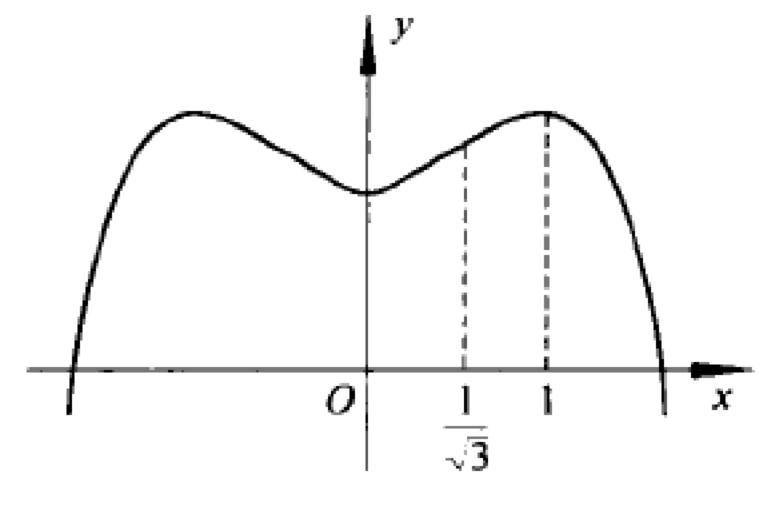


图 2.61

当 $x=0$ 时，$y=1$；$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，$y=\frac{23}{18}$；$x=1$ 时，$y=\frac{3}{2}$.（图 2.61）

【1473】 $y=(x+1)(x-2)^2$.

解 $y'=3x(x-2)$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 2；$y''=6x-6$，令 $y''=0$ 得 $x=1$.

列表

x		0		1		2	
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=0$ 时，$y=4$；$x=1$ 时，$y=2$；$x=2,-1$ 时，$y=0$.(图 2.62)

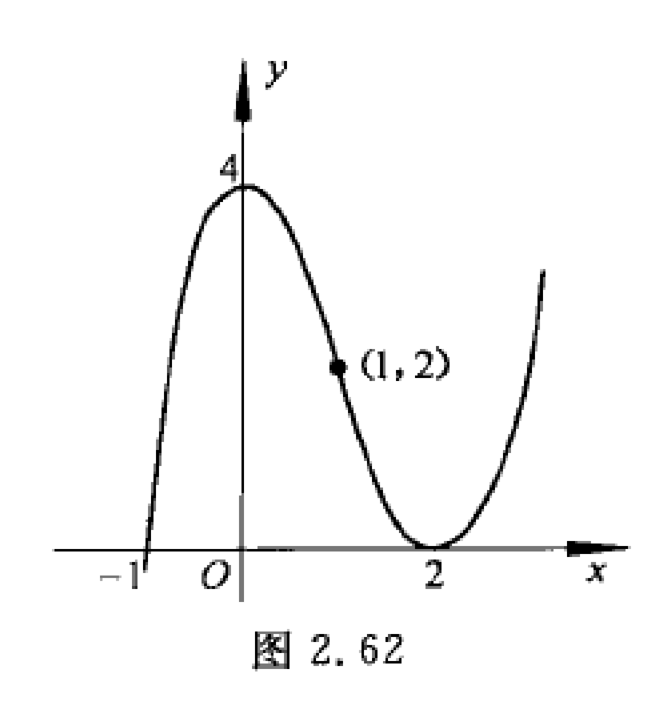


图 2.62

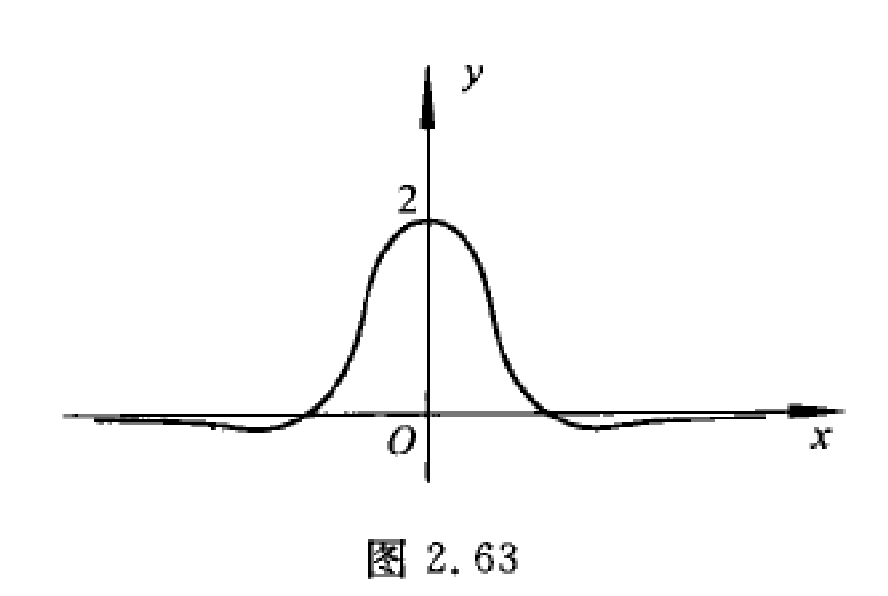


图 2.63

【1474】 $y=\frac{2-x^2}{1+x^4}$.

解题思路 图像关于 Oy 轴对称. 零点处：$x=\pm\sqrt{2}$.

当 $x=0$ 时有极大值 $y=2$；当 $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm2.06$ 时有极小值 $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-0.12$.

拐点处：$x=\pm2.67$ 或 ±0.77. 渐近线：$y=0$.

解 显见图像对称于 Oy 轴.

零点处：$x=\pm\sqrt{2}$. $y'=\frac{2x(x^4-4x^2-1)}{(1+x^4)^2}$,

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm2.06$.

$$y''=-\frac{2(3x^8-20x^6-12x^4+12x^2+1)}{(1+x^4)^3},$$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm2.67$ 或 ±0.77. 经判别知，它们为拐点，又因 $y''\Big|_{x=0}=-2<0$，故有极大值 $y=2$；

$y''\Big|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}}>0$，故有极小值 $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-0.12$.

渐近线为 $y=0$. 事实上，它的斜率和截距分别为

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x(1+x^4)}=0,$$

它在 y 轴上的截距为

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-kx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{1+x^4}=0.$$

如图 2.63 所示.

【1475】 $y=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

解 零点处：$x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线：$x=2$，$x=3$ 和 $y=1$.

$$y'=\frac{-5x^2+14x-5}{(x^2-5x+6)^2},$$

$$y''=\frac{2(5x^3-21x^2+15x+17)}{(x^2-5x+6)^3}.$$

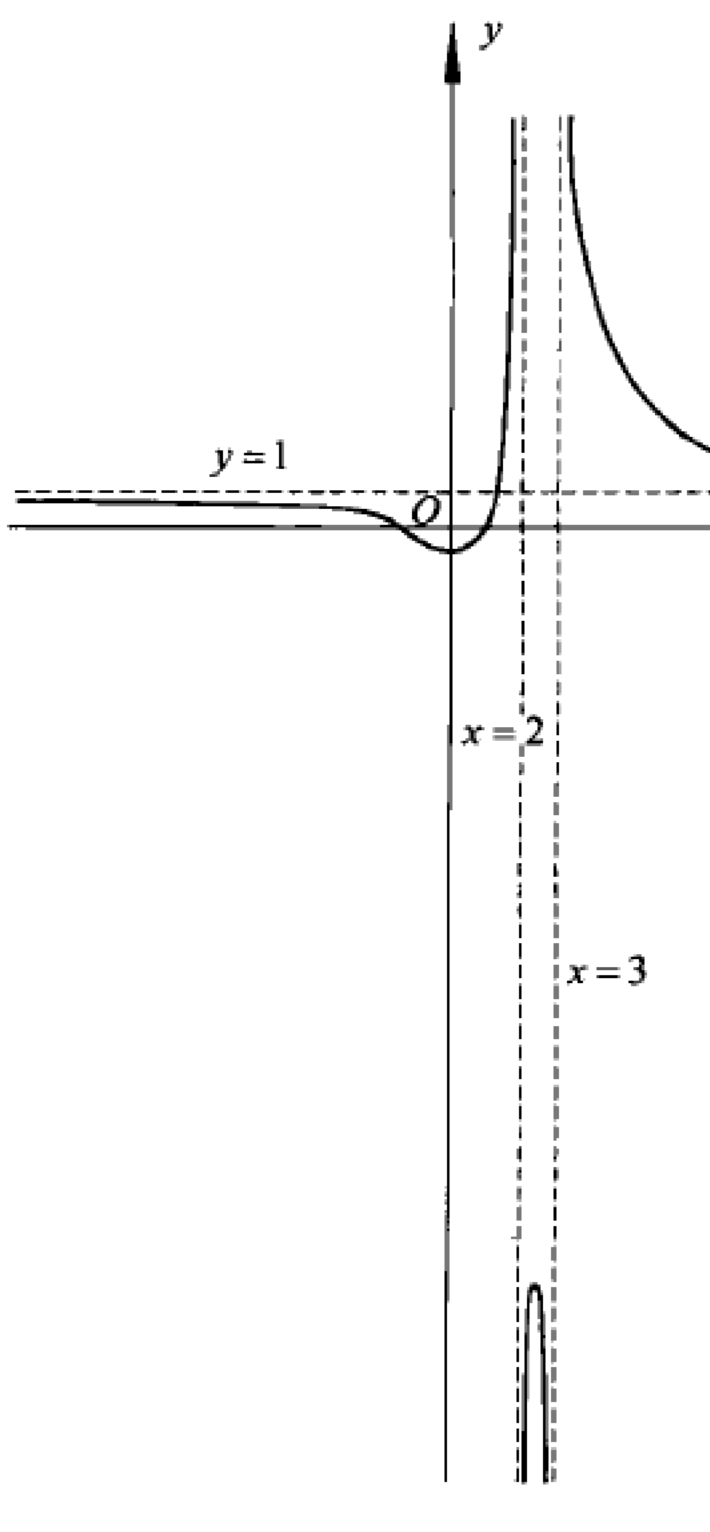


图 2.64

令 $y'=0$ 得 $x\approx0.42$，$x\approx2.38$. 令 $y''=0$ 得 $x\approx-0.586$. 经判别知，$y\Big|_{x\approx0.42}\approx-0.20$ 为极小值，$y\Big|_{x\approx2.38}\approx-19.80$ 为极大值；$x\approx-0.586$，$y\approx-0.07$为拐点. 由于

$$y=1-\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x-3},$$

故可用图像相加法作出函数的图像(图 2.64).

【1476】 $y=\frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线：$y=0$，$x=-1$ 和 $x=1$.

$$y'=\frac{2x^2+x+1}{(1+x)^2(1-x)^3},\quad y''=\frac{2(3x^3+3x^2+5x+1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y'=0$ 无实根，无极值点. 令 $y''=0$ 得 $x\approx-0.22$，经判别知，它为拐点，此时 $y\approx-0.20$.

当 $x<-1$ 时，$y'>0$，曲线上升；当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$，曲线上升；当 $x>1$ 时，$y'<0$，曲线下降.
(图 2.65)

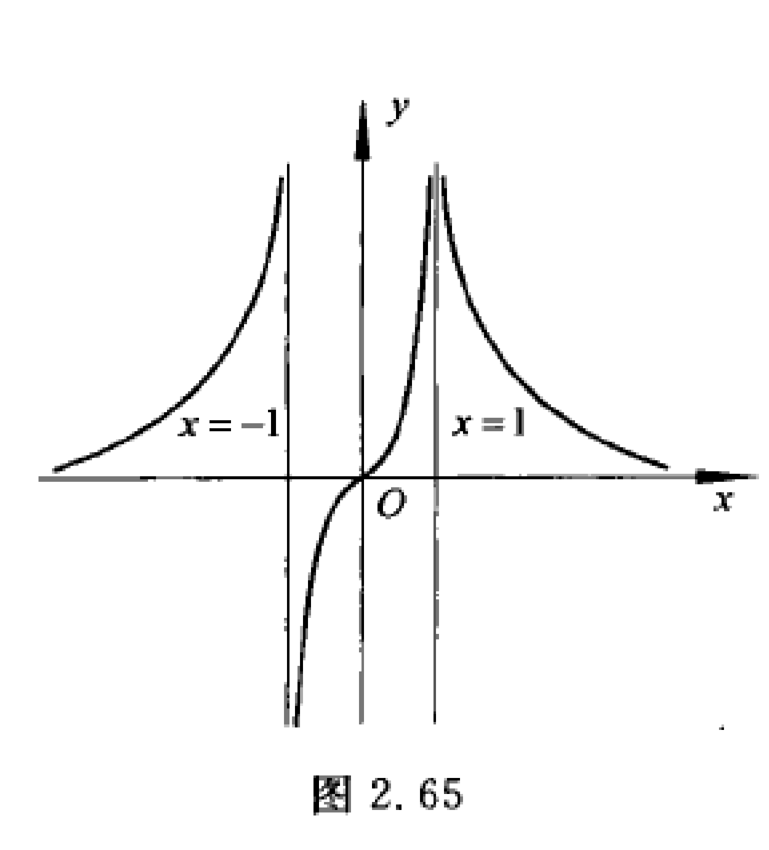


图 2.65

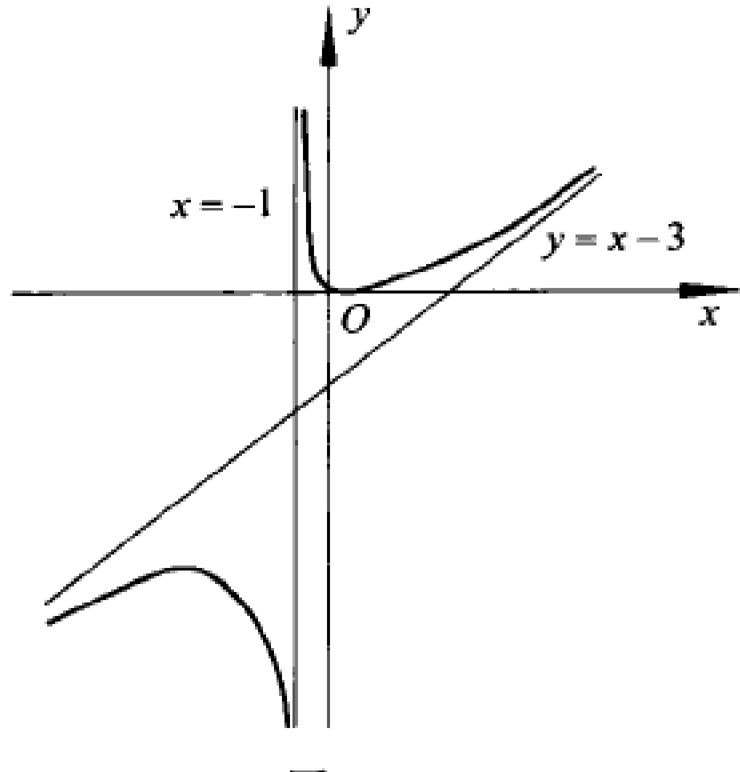


图 2.66

【1477】 $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=-1$. 斜渐近线：$y=x-3$，事实上，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=-3$.

垂直渐近线：$x=-1$. $y'=\frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$. 令 $y'=0$，得 $x=0$，或 $x=-4$. $y''=\frac{12x^2}{(1+x)^5}$.

当 $x<-1$ 时，$y''<0$，图像呈凸状；当 $x>-1$ 时，$y''>0$，图像呈凹状；

又 $y''\big|_{x=-4}<0$，故当 $x=-4$ 时有极大值 $y=-9\frac{13}{27}$；由于 y' 经过 $x=0$ 从负变到正，故当 $x=0$ 时取得极小值 $y=0$.(图 2.66)

【1478】 $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 零点处：$x=-1$. 垂直渐近线：$x=1$；

又 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=1$，故还有水平渐近线为 $y=1$.

$$y'=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}，令 y'=0 得 x=-1；\quad y''=\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}，令 y''=0 得 x=-1 或 -4.$$

列表

x		-4		-1		1	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	拐点	↘	极小点	↗	不连续点	↘

当 $x=-4$ 时，$y=\frac{81}{625}$；$x=-1$ 时，$y=0$；$x=0$ 时，$y=1$.

(图 2.67)

y
x=1
y=1
O
x
图 2.67

【1479】 $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x=1$.

垂直渐近线：$x=-1$； 斜渐近线：$y=x-3$.

事实上，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=-3$.

$y'=\frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

$y''=\frac{10x-2}{(x+1)^4}$，令 $y''=0$ 得 $x=\frac{1}{5}$.

列表

x		$-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$		-1		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	+	0	−	∞	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	∞	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	不连续点	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=-\frac{\sqrt{17}+3}{2}\approx-3.56$ 时，有极大值 $y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx-8.82$；

当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$；

当 $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx0.56$ 时，有极小值 $y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx-0.06$；

当 $x=\frac{1}{5}$ 时，$y=-\frac{1}{45}$ （图 2.68）.

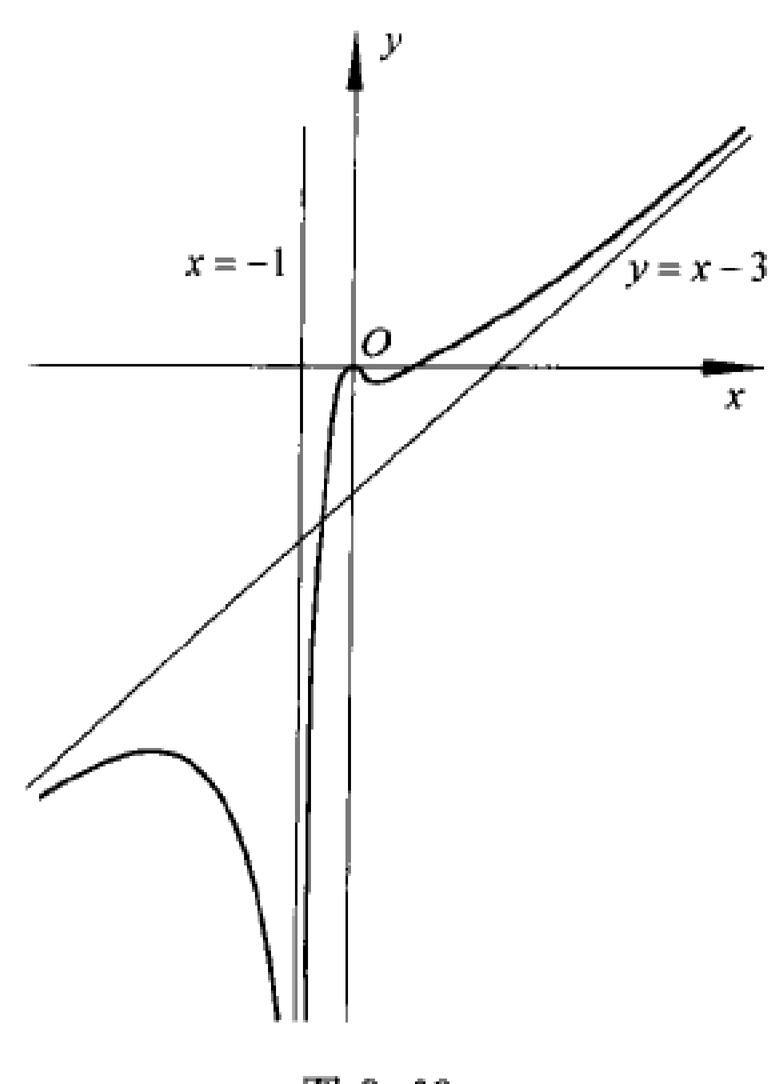


图 2.68

【1480】 $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解题思路 零点处：$x=0$. 渐近线：$x=-1$，$x=1$ 及 $y=0$. 图像关于原点对称. 无极值，拐点处：$x=0$.

解 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线：$x=-1$，$x=1$ 及 $y=0$.

以 $-x$ 替代 x，y 的绝对值不变，符号改变，故图像关于原点对称.

$y'=\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}$，令 $y'=0$，无实根.

$y''=\frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}$，令 $y''=0$，得 $x=0$.

经判别知：无极值，$x=0$ 为拐点(图 2.69).

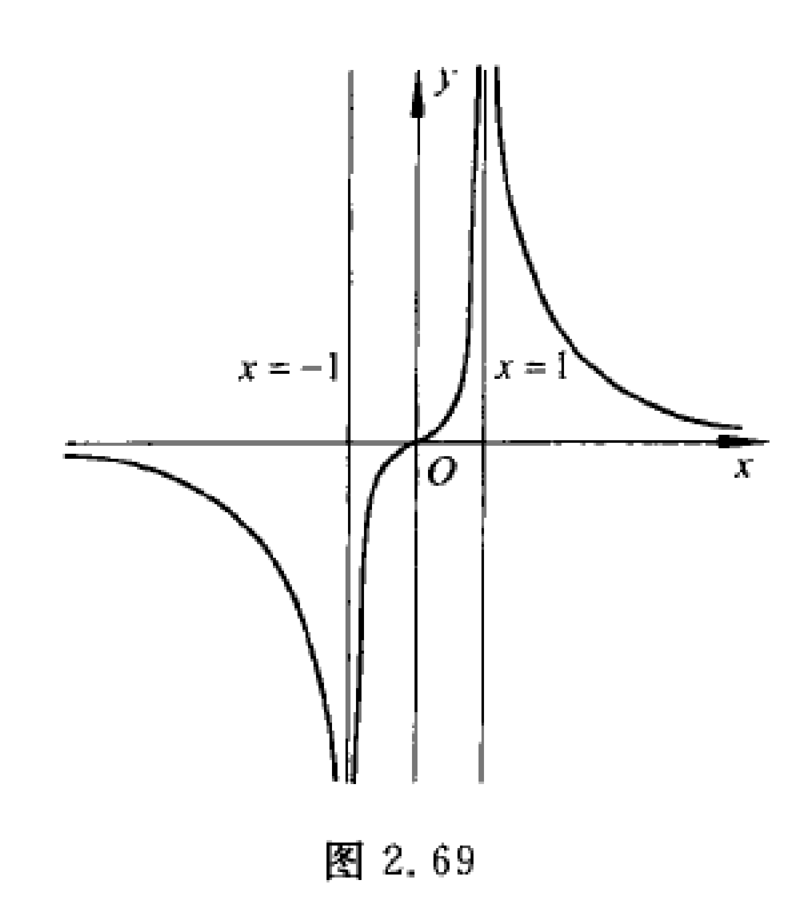


图 2.69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	不连续点	↗	拐点	↗	不连续点	↘

【1481】 $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 零点处：$x=-1$. 不连续点：$x=1$. 垂直渐近线：$x=1$；斜渐近线：$y=x+5$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=5.$$

$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=-1$ 或 5.

$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$，令 $y''=0$ 得 $x=-1$.

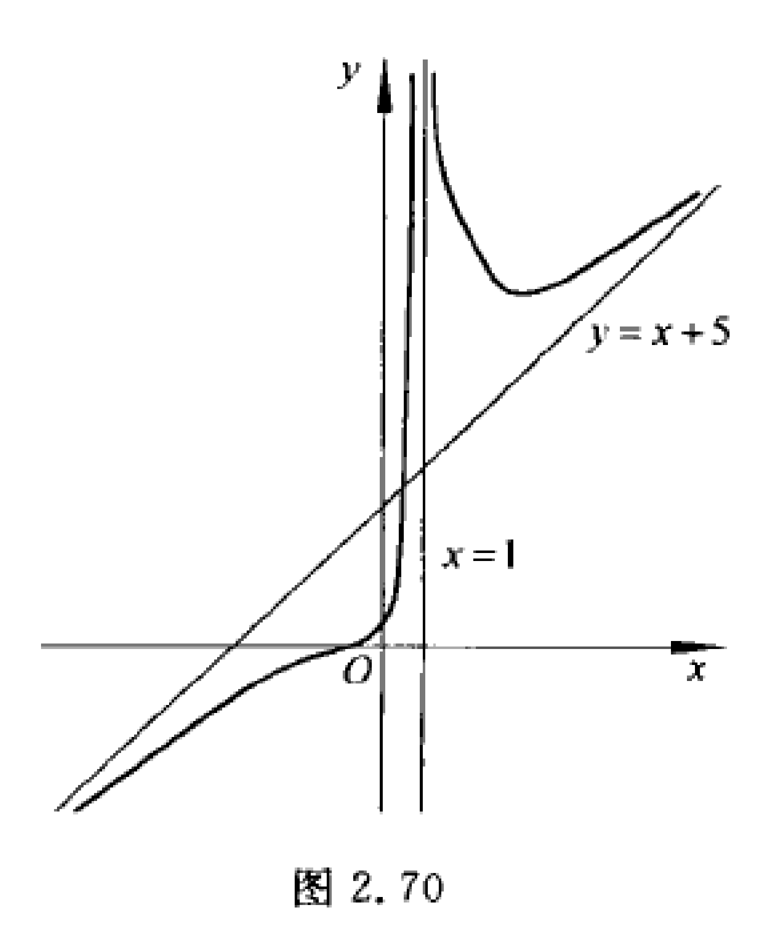


图 2.70

列表

x		-1		1		5	
y'	$+$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	∞	$+$	$+$	$+$
y	↗	拐点	↗	不连续点	↘	极小点	↗

当 $x=-1$ 时，$y=0$；当 $x=5$ 时，$y=13\frac{1}{2}$(图 2.70).

【1482】 $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

解 垂直渐近线：$x=-1$；

斜渐近线：$y=x$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.$$

$$y'=\frac{x^6+4x^3-24x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y''=\frac{-6x^5+96x^4+12x^2-48x}{(x^3+1)^3},$$

令 $y'=0$，得 $x=0,2$ 及 $x\approx-2.4$.

$y''\Big|_{x=2}>0$，故当 $x=2$ 时有极小值 $y=2\frac{2}{3}$；

$y''\Big|_{x=-2.4}<0$；故当 $x\approx-2.4$ 时有极大值 $y\approx-3.2$.

经判别知：当 $x=0$，0.752，16.006 时有拐点. 渐近线 $y=x$ 与曲线交于点(8,8). 如图 2.71 所示.

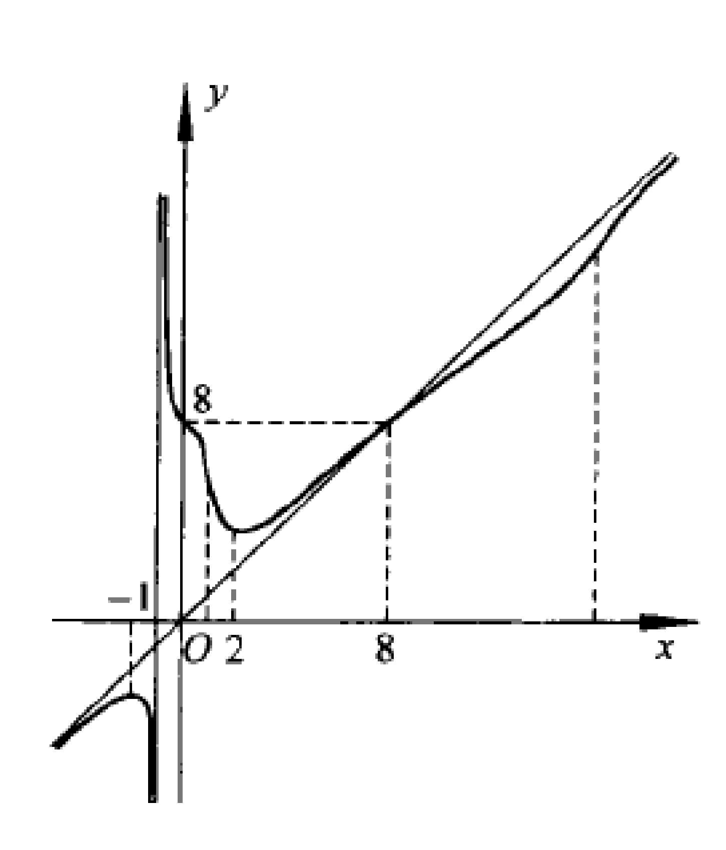


图 2.71

【1483】 $y=\frac{1}{1+x}-\frac{10}{3x^2}+\frac{1}{1-x}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

零点处：$x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm0.79$.

$y'=\frac{4(8x^4-10x^2+5)}{3x^3(1-x^2)^2}$，$y'=0$ 无实根，无极值点.

$y''=\frac{4(24x^6-42x^4+45x^2-15)}{x^4(1-x^2)^3}$，令 $y''=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm0.71$.

经判别知，此为拐点，相应纵坐标 $y=-2\frac{2}{3}$.

渐近线：$x=0$，$x=-1$，$x=1$ 和 $y=0$.

当 $x>0$ 时，$y'>0$，曲线上升.

当 $0<x<0.71$ 时，$y''<0$，图像呈凸状.

当 $0.71<x<1$ 时，$y''>0$，图像呈凹状.

当 $1<x<+\infty$时，$y''<0$，图像呈凸状.

图像如图 2.72 所示.

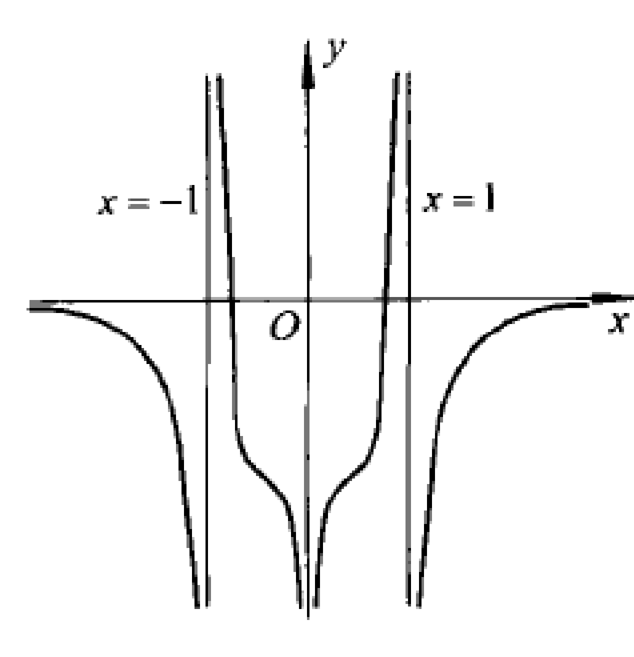


图 2.72

【1484】 $y=(x-3)\sqrt{x}$.

解 存在域：$0\leqslant x<+\infty$. 零点处：$x=0$ 和 $x=3$.

$y'=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$；

$y''=\frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}>0\quad(0<x<+\infty)$，

所以，图像始终是凹的.

由于 $y''\Big|_{x=1}>0$，故当 $x=1$ 时有极小值 $y=-2$；当 $x=0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to0+}y'=-\infty$知，曲线在 $x=0$ 点与 y 轴相切，易见它有边界极大值$y=0$.

图像如图 2.73 所示.

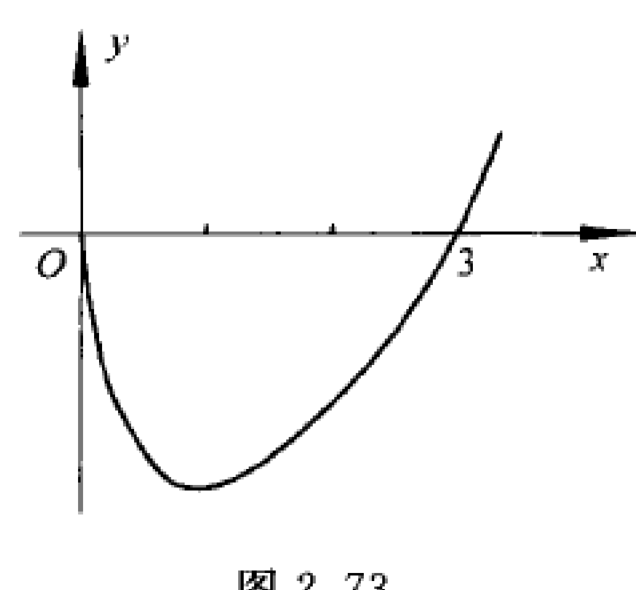


图 2.73

【1485】 $y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$.

解 存在域：$8-x^2\geqslant0$，即 $|x|\leqslant2\sqrt{2}\approx2.83$.

零点处：$x=0$ 和 $x=\pm2\sqrt{2}$.

图像关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之：

$y'=\frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$，令 $y'=0$ 得 $x=2$.

$y''=\frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=2\sqrt{3}$或 $x=0$.

然而点 $x=2\sqrt{3}$不在存在域内，对于 $x=0$ 来说，如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一分支曲线的话，则也可理解为拐点. 同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况，故曲线呈双纽状.

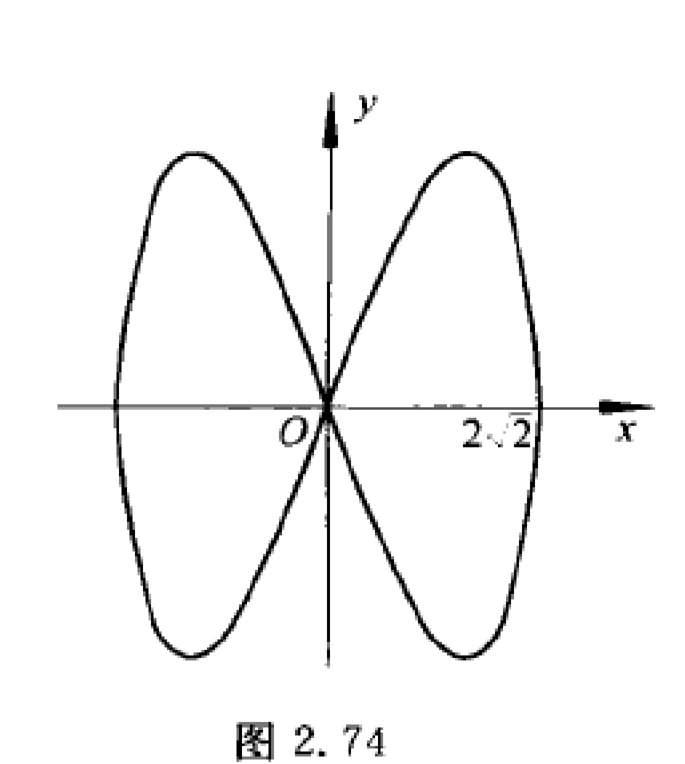


图 2.74

当 $0<x<2$ 时，$y'>0$，当 $2<x<2\sqrt{2}$时，$y'<0$，故当 $x=2$ 时，有极大值 $y=4$. 当 $x=2\sqrt{2}$及 $x=0$ 时，显然有极小值 $y=0$.

前者是边界的极小值，而且曲线在 $x=2\sqrt{2}$处以 $x=2\sqrt{2}$为垂直切线. 图像如图 2.74 所示.

【1486】 $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 存在域：$1\leqslant x\leqslant 2$ 及 $3\leqslant x<+\infty$.

零点处：$x=1$，$x=2$ 和 $x=3$.

图像关于 Ox 轴对称.下面就第一象限讨论之：

$$y'=\frac{3x^2-12x+11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$

令 $y'=0$，得 $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx1.42$，经判别知，此时有极大值

$$|y|=\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}\approx0.62.$$

令 $y''=0$ 解得 $x\approx3.468$，经判别知，它是拐点.

当 $x>3$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像是上升的.

当 $x=1,2$ 和 3 时有边界的极小值 $y=0$ 且 $y'=\infty$.

(图 2.75)

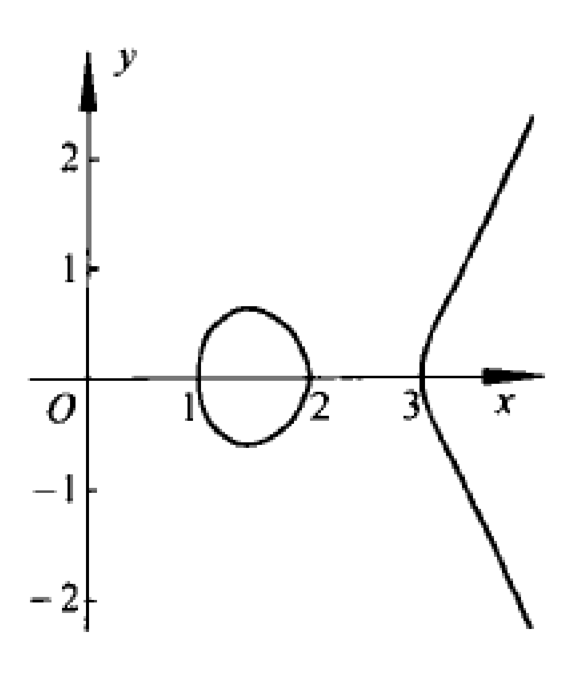


图 2.75

【1487】 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

解 零点处：$x=-1$ 和 $x=1$. 又当 $x=0$ 时，$y=1$.

渐近线：$y=x-\frac{1}{3}$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-\frac{1}{3}.$$

$$y'=\frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}，令\ y'=0\ 得\ x=-\frac{1}{3};$$

当 $x=\pm1$ 时，$y'=\infty$.

$$y''=\frac{-8}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}，当\ x=\pm1\ 时，y''=\infty.$$

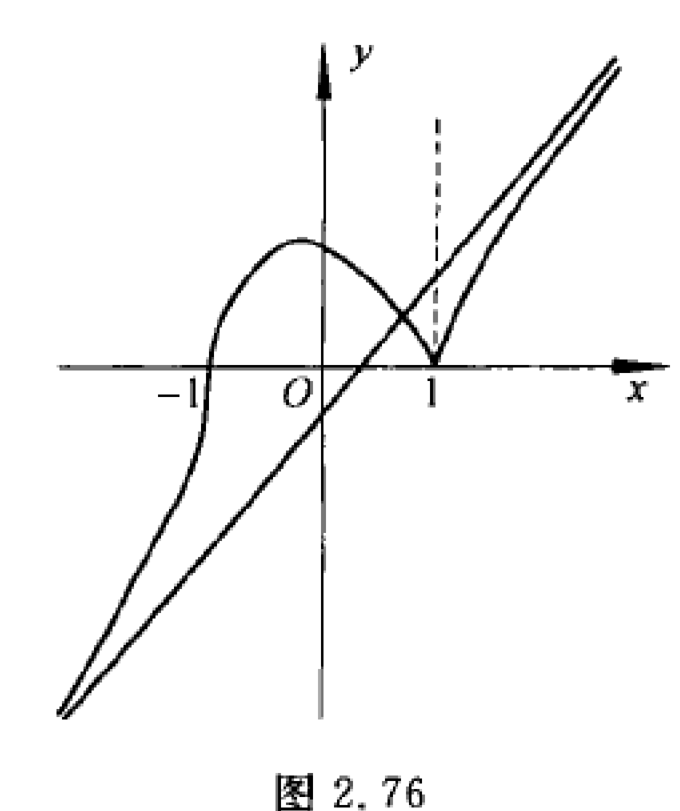


图 2.76

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	+	∞	+	0	−	∞	+
y''	+	∞	−	−	−	∞	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	极小点	↗

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，有极大值 $y\approx1.06$；当 $x=1$ 时，有极小值 $y=0$.

图像如图 2.76 所示.

【1488】 $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}.$$

当 x 经过 $x=0$ 时，y' 由负变正，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=-1$，且 $y'\big|_{x=0^-}=-\infty$，$y'\big|_{x=0^+}=+\infty$，又当 $x<0$ 时，$y'<0$，当 $x>0$ 时，$y'>0$. 同时，$y'=0$ 和 $y=0$ 均无实根，故知图像是凸的，且以 $y=0$ 为渐近线(图 2.77).

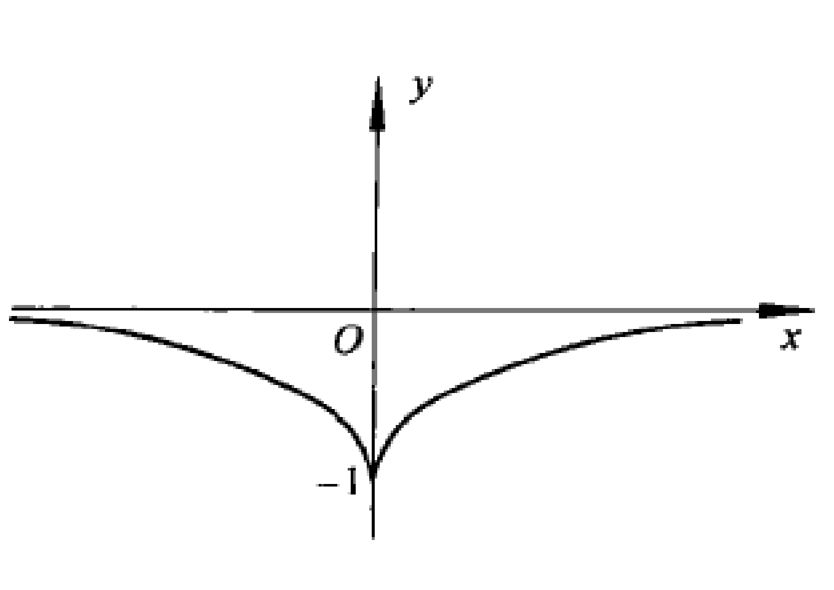


图 2.77

【1489】 $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以$-x$替代x，y变成$-y$，故图像关于坐标原点对称.

渐近线：$y=0$. 零点处：$x=0$.

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}，当 x=\pm 2 时，y'=\infty.$$

$$y''=\frac{2}{9}\cdot\frac{(x+2)^{\frac{4}{3}}-(x-2)^{\frac{4}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}，令 y''=0 得 x=0.$$

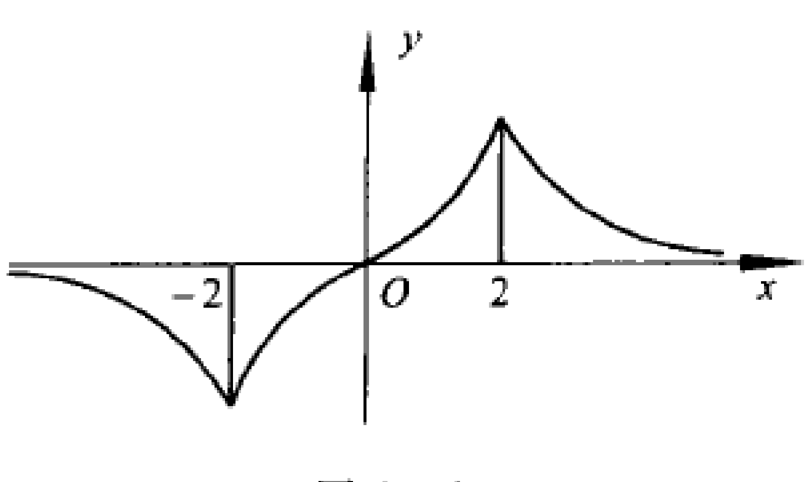


图 2.78

列表

x		-2		0		2	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	最小点	↗	拐点	↗	最大点	↘

当$x=-2$时，有最小值$y=-\sqrt[3]{16}$；当$x=2$时，有最大值$y=\sqrt[3]{16}$.

图像如图 2.78 所示.

【1490】 $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图像关于Oy轴对称.

$$y'=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right],$$

令$y'=0$得$x=0$；当$x=\pm 1$时，$y'=\infty$.

$$y''=-\frac{2}{9}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}\right]<0，图像始终呈凸状.$$

当$x=\pm 1$时，取得最小值$y=\sqrt[3]{4}\approx 1.59$.

当$x=0$时，有极大值$y=2$.

图像如图 2.79 所示.

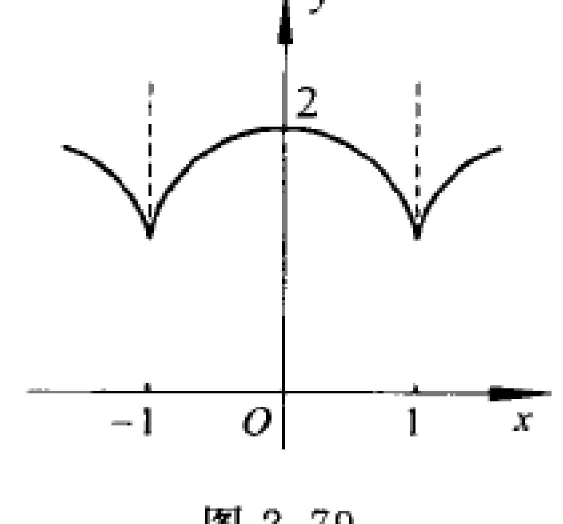


图 2.79

【1491】 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解 图像关于坐标原点对称. 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=\pm 1$.

$$y'=\frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}，令 y'=0，得 x=\pm\sqrt{3}. 当 x=\pm 1 时，y'=\infty.$$

$$y''=-\frac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}，令 y''=0 得 x=0 或 \pm 3.$$

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	不连续点	↘	拐点	↘	不连续点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线：$x=-1$，$x=1$. 当$x=\pm\sqrt{3}$时，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx\pm 1.38$；当$x=\pm 3$时，$y=\pm 1\dfrac{1}{2}$.

图像如图 2.80 所示.

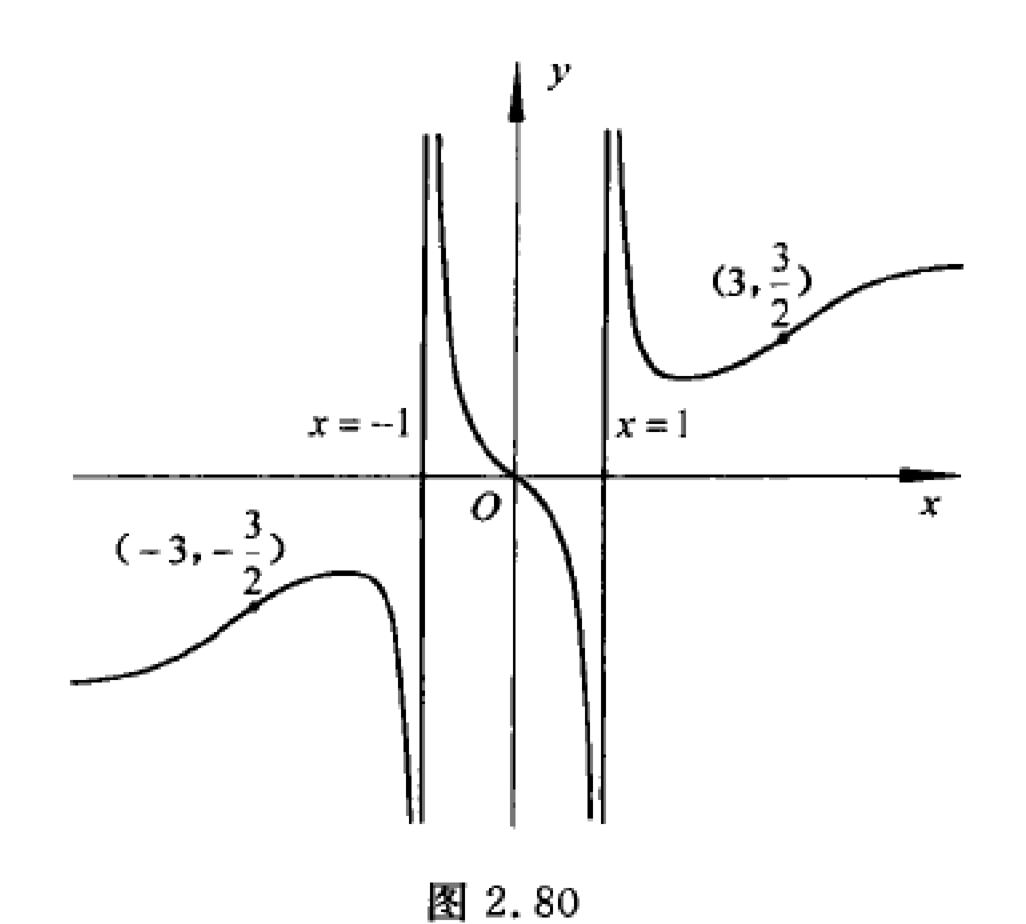


图 2.80

【1492】 $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

解 存在域：$|x|\geqslant 1$ 及孤立点 $x=0$. 图像关于 Oy 轴对称，且位于 Ox 轴的上方. 渐近线：$y=\pm\frac{x}{2}$.

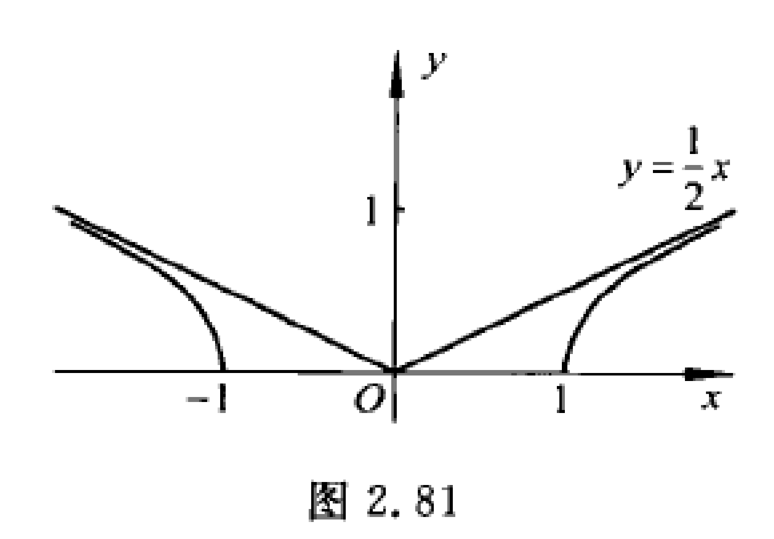


图 2.81

$$y'=\frac{2x^5-3x^3+2x}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}},$$

$$y''=\frac{1}{(2x^2-1)^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}(-6x^4+3x^2+2).$$

当 $x>1$ 时，$y'>0$，$y''<0$，故图像上升，且呈凸状. 又当 $x=\pm 1$ 时，有边界的极小值 $y=0$.（图 2.81）

【1493】 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解 存在域：$x>0$.

渐近线：$x=0$ 及 $y=x+\frac{3}{2}$.

$$y'=\frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}, \text{令 } y'=0 \text{ 得 } x=\frac{1}{2}.$$

$$y''=\frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}}>0, \text{故图像是凹的.}$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，有极小值 $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2.60$.

图像如图 2.82 所示.

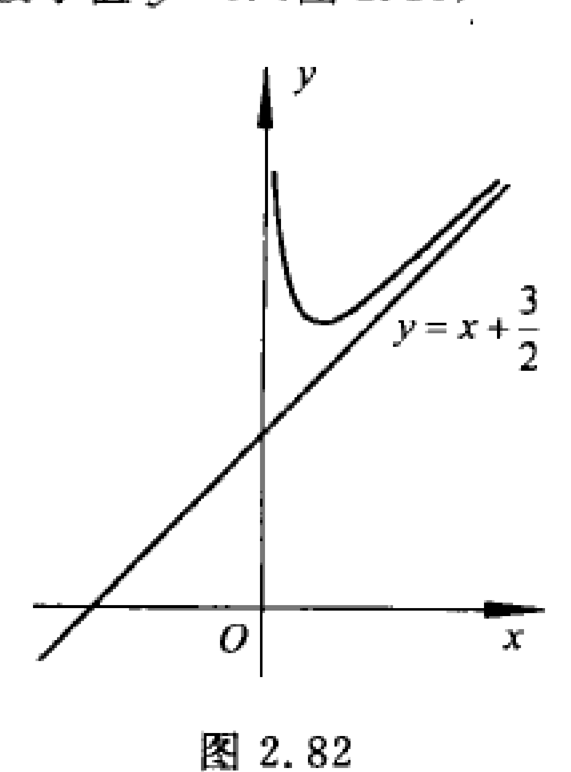


图 2.82

【1494】 $y=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域：$x\geqslant 0$ 及 $x<-3$. 零点处：$x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\approx 4.30$.

斜渐近线：$y=\frac{5}{2}-2x$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-2.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x+3}-(x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}-x-1}=\frac{5}{2}.$$

水平渐近线：$y=-\frac{1}{2}$. 事实上，

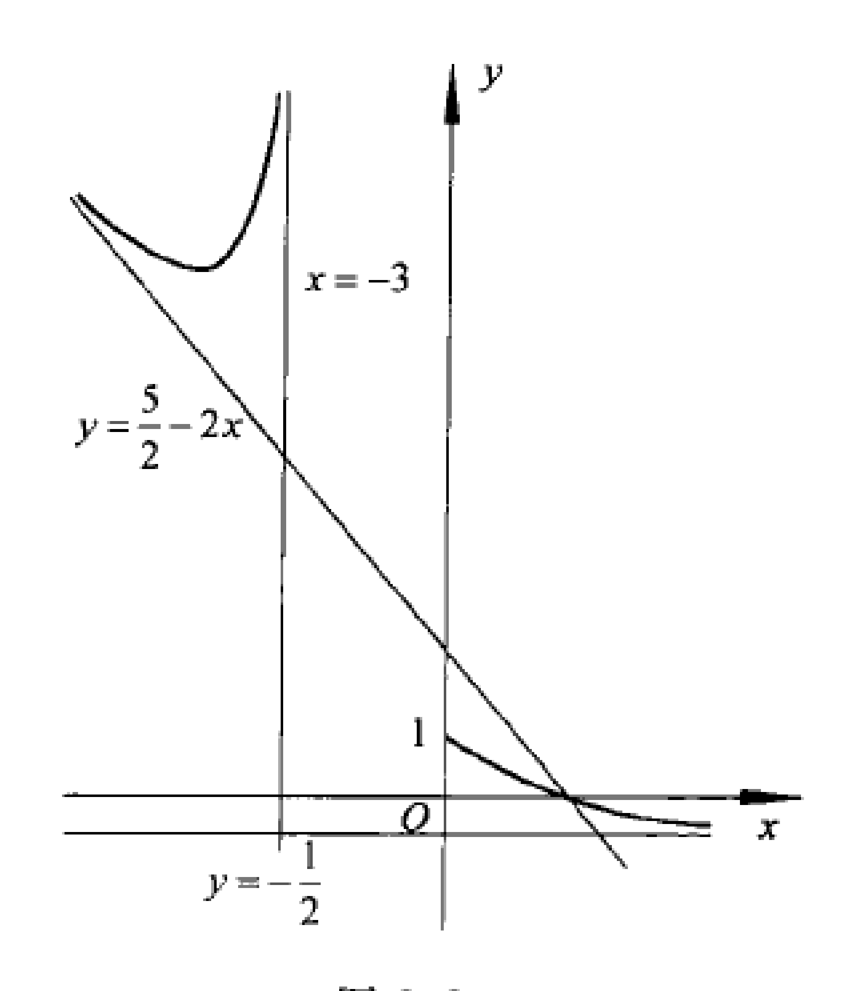


图 2.83

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x-3}-(x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1}=-\frac{1}{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to-3}y=\infty$，故垂直渐近线为 $x=-3$.

$$y'=-1+\frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}\text{，令 } y'=0 \text{ 得 } x=-4;$$

$$y''=\frac{27}{4(x+3)^2\sqrt{x(x+3)}}>0\text{，故图像呈凹状.}$$

当 $x=-4$ 时有极小值 $y=13$. 当 $x=0$ 时有边界极大值 $y=1$.

图像如图 2.83 所示.

【1495】 $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处：$x=0$. 垂直渐近线：$x=-1$.

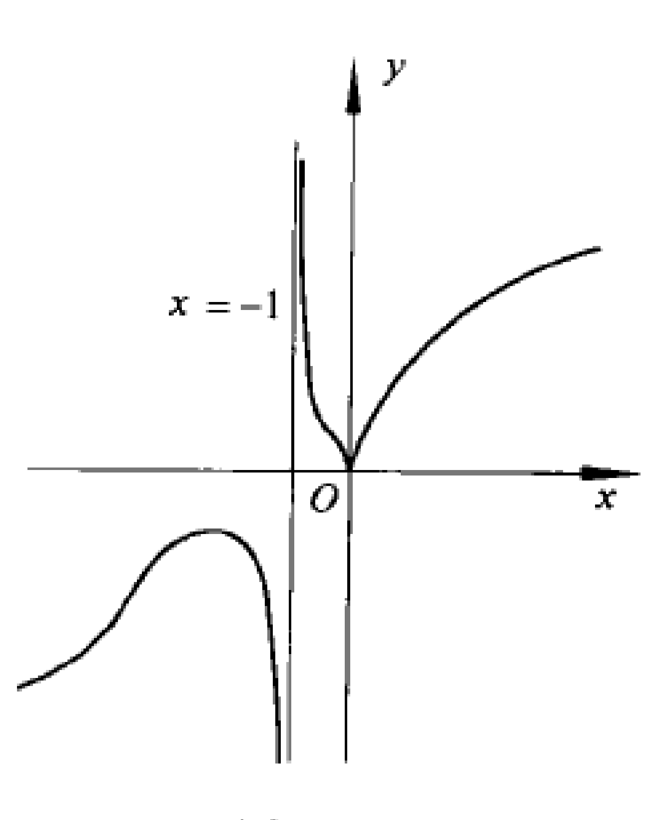


图 2.84

$$y'=\frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}}\text{，令 } y'=0 \text{ 得 } x=-2\text{. 当 } x=0 \text{ 时 } y'=\infty.$$

$$y''=-\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2\sqrt[3]{x(x+1)}}\text{，令 } y''=0 \text{ 得 } x=-2\pm\sqrt{3}.$$



经判别知：

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$；当 $x=-2$ 时有极大值 $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$.

拐点：$x=-(2-\sqrt{3})\approx-0.27$，此时 $y\approx0.46$；

$x=-(2+\sqrt{3})\approx-3.73$，此时 $y\approx-1.72$. 图像如图 2.84 所示.

【1496】 $y=\sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$.

解 图像关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线：$y=\pm x$.

$$y'=\frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\text{，令 } y'=0 \text{ 得 } x=0 \text{ 或 } \pm1.$$

$$y''=\frac{-x^8+20x^6+18x^4+36x^2-9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}\text{，令 } y''=0 \text{ 得 } x\approx\pm0.47 \text{ 或 } \pm4.58,$$

经判别知，它们均为拐点：

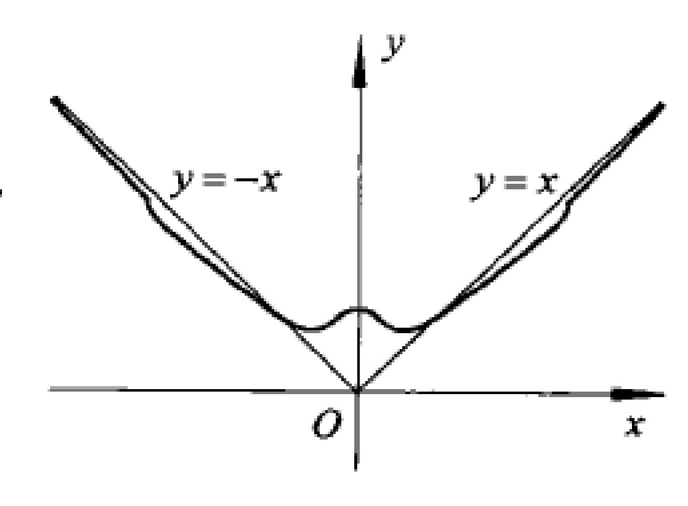


图 2.85

当 $x\approx\pm0.47$ 时，$y\approx1.58$； 当 $x\approx\pm4.58$ 时，$y\approx4.49$.

当 $x=0$ 时有极大值 $y=\sqrt{3}\approx1.73$；

当 $x=\pm1$ 时有极小值 $y=\sqrt{2}\approx1.41$.

图像如图 2.85 所示.

【1497】 $y=\sin x+\cos^2 x$.

提示 函数的周期 $T=2\pi$，故建议在闭区间 $[0,2\pi]$ 内作其图像.

解 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内的图像讨论如下：

零点处：$x=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx1.21\pi$ 及 $x=2\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx1.79\pi$.

$y'=\cos x(1-2\sin x)$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}$及$\dfrac{3\pi}{2}$；

$y''=-\sin x-2\cos2x$，令 $y''=0$ 得 $4\sin^2x-\sin x-2=0$，

解之得

$x_1=\arcsin\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$，此时 $y_1\approx1.13$；

$x_2=\pi-\arcsin\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$，此时 $y_2\approx1.13$；

$x_3=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$，此时 $y_3\approx0.055$；

$x_4=2\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$此时 $y_4\approx0.055$，

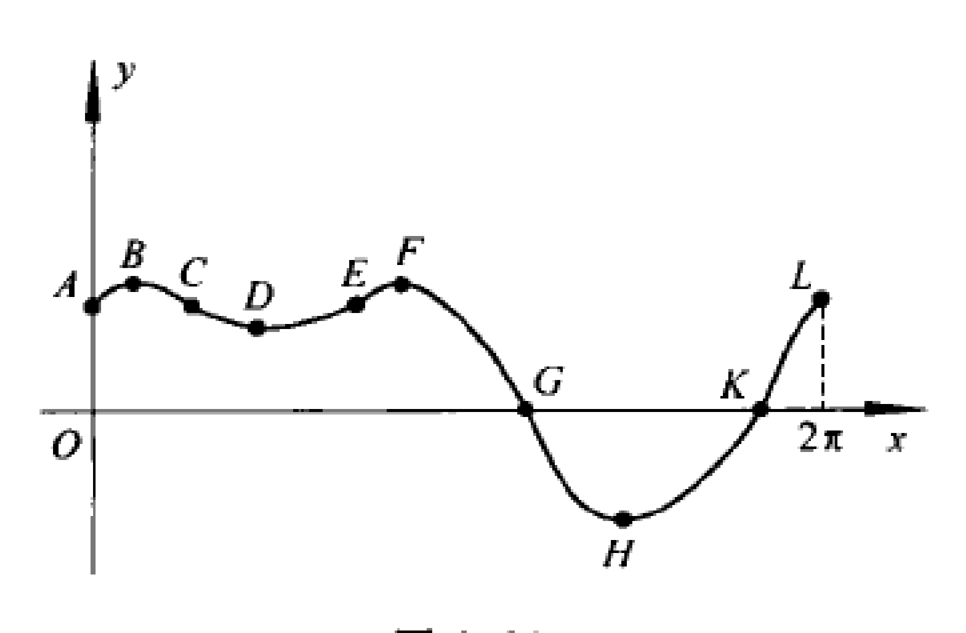


图 2.86

经判断知：$x_1\approx0.32\pi$，$x_2\approx0.68\pi$，$x_3\approx1.20\pi$，$x_4\approx1.80\pi$ 均为拐点；

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$时有极小值 $y=1$； 当 $x=\dfrac{3\pi}{2}$时有极小值 $y=-1$；

当 $x=\dfrac{\pi}{6}$和 $x=\dfrac{5\pi}{6}$时，有极大值 $y=1\dfrac{1}{4}$. 如图 2.86 所示. 图中主要点的坐标：

$A(0,1)$， $B\left(\dfrac{\pi}{6},1\dfrac{1}{4}\right)$， $C(0.32\pi,1.13)$， $D\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$， $E(0.68\pi,1.13)$， $F\left(\dfrac{5}{6}\pi,1\dfrac{1}{4}\right)$，

$G(1.20\pi,0.055)$， $H\left(\dfrac{3}{2}\pi,-1\right)$， $K(1.80\pi,0.055)$ 和 $L(2\pi,1)$.



【1498】 $y=(7+2\cos x)\sin x$.

提示 由于图像关于坐标原点对称. 又函数的周期 $T=2\pi$. 故建议在$[-\pi,\pi]$内作其图像.

解 图像关于原点对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$内的图像讨论如下：

零点处：$x=0$ 或$\pm\pi$.

$y'=7\cos x+2\cos2x$，令 $y'=0$ 得 $2\cos2x+7\cos x=0$，解之得

$$x=\arccos\frac{1}{4}\approx0.42\pi,\quad x=-\arccos\frac{1}{4}\approx-0.42\pi.$$

$y''=-7\sin x-4\sin2x$，令 $y''=0$ 得 $\sin x(7+8\cos x)=0$，解之得 $x_1=0$，此时 $y_1=0$；

$x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\dfrac{7}{8}\right)\approx\pm0.84\pi$，此时 $y_{2,3}\approx\pm2.54$；

$x_{4,5}=\pm\pi$，此时 $y_{4,5}=0$.

经判别知：点 x_1,x_2,x_3,x_4 和 x_5 均为拐点；

当 $x=-\arccos\dfrac{1}{4}$时有极小值 $y=-\dfrac{15}{8}\sqrt{15}\approx-7.3$；

当 $x=\arccos\dfrac{1}{4}$时有极大值 $y=\dfrac{15}{8}\sqrt{15}\approx7.3$. 图像如图2.87所示，图中主要点的坐标：

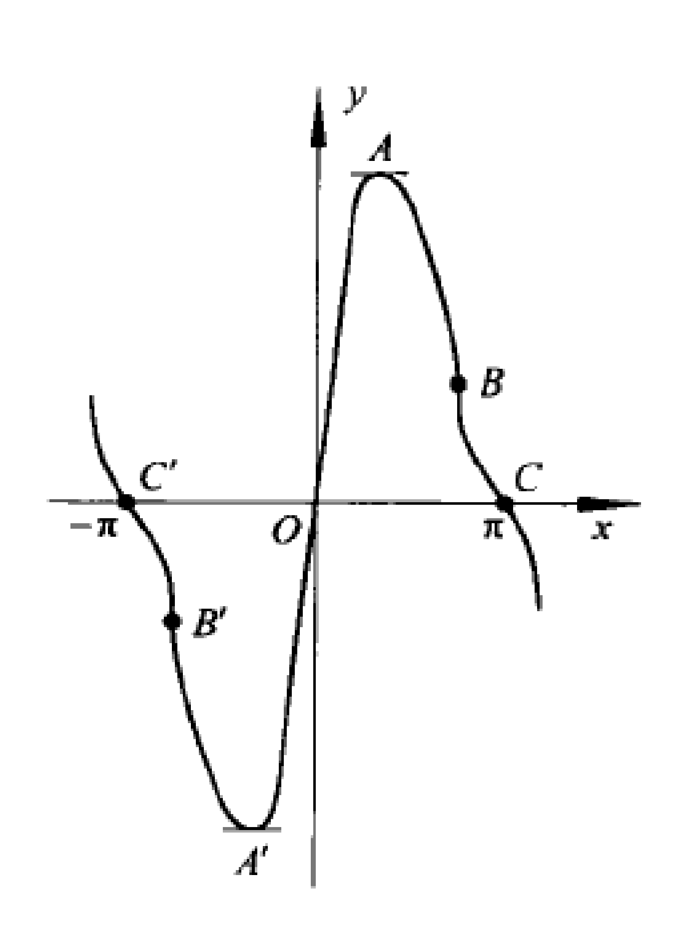


图 2.87

$A(0.42\pi,7.3)$， $B(0.84\pi,2.54)$， $C(\pi,0)$；

$A'(-0.42\pi,-7.3)$， $B'(-0.84\pi,-2.54)$， $C'(-\pi,0)$.

【1499】 $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin3x$.

解 图像关于坐标原点对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图像.

零点处：$x=0$ 或 $\pm\pi$.

$y'=\cos x+\cos 3x$，令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}$；

$y''=-\sin x-3\sin 3x$，令 $y''=0$ 得

$x_1=0$，　$y_1=0$；

$x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\approx\pm0.37\pi$，　$y_{2,3}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}=\pm0.81$；

$x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\approx\pm0.63\pi$，　$y_{4,5}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}=\pm0.81$；

$x_{6,7}=\pm\pi$，　$y_{6,7}=0$.

经判别知：点 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 和 x_7 均为拐点；

极小值：当 $x=-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$ 时，$y=-\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx-0.94$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\frac{2}{3}$；

极大值：当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$y=-\frac{2}{3}$ 当 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ 时，$y=\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx0.94$.

图像如图 2.88 所示，图中主要点的坐标：

$A\left(\frac{\pi}{4},0.94\right)$，　$B(0.37\pi,0.81)$，　$C\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\right)$，　$D(0.63\pi,0.81)$，　$E\left(\frac{3\pi}{4},0.94\right)$，　$F(\pi,0)$；

点 A',B',C',D',E',F' 和点 A,B,C,D,E,F 关于原点对称.

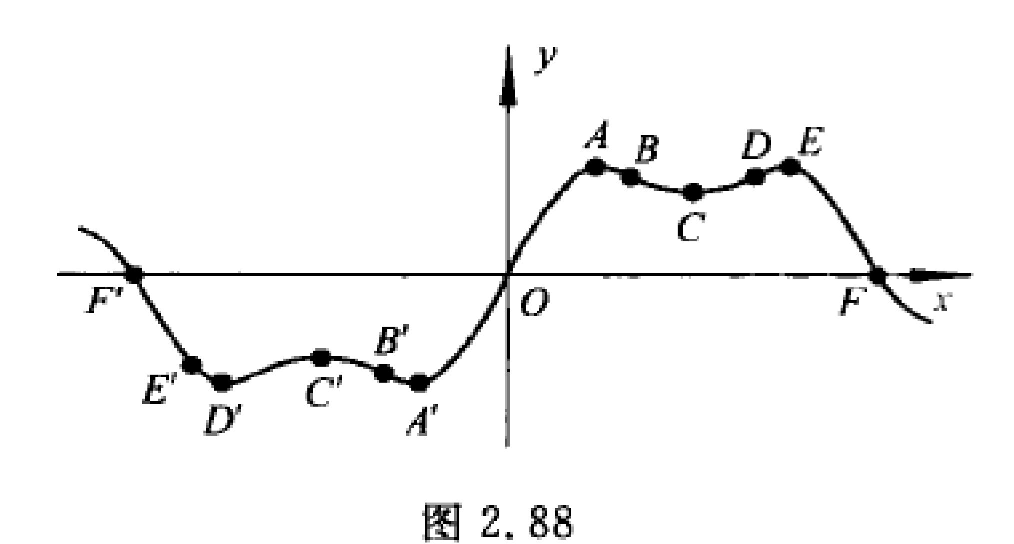


图 2.88

【1500】　$y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

解　图像关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图像.

零点处：$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm0.62\pi$.

$y'=-\sin x+\sin 2x$，令 $y'=0$ 得 $x=0,\pm\frac{\pi}{3},\pm\pi$.

$y''=-\cos x+2\cos 2x$，令 $y''=0$ 得

$x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm0.18\pi$，　$y_{1,2}\approx0.63$；

$x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm0.70\pi$，　$y_{3,4}\approx-0.44$.

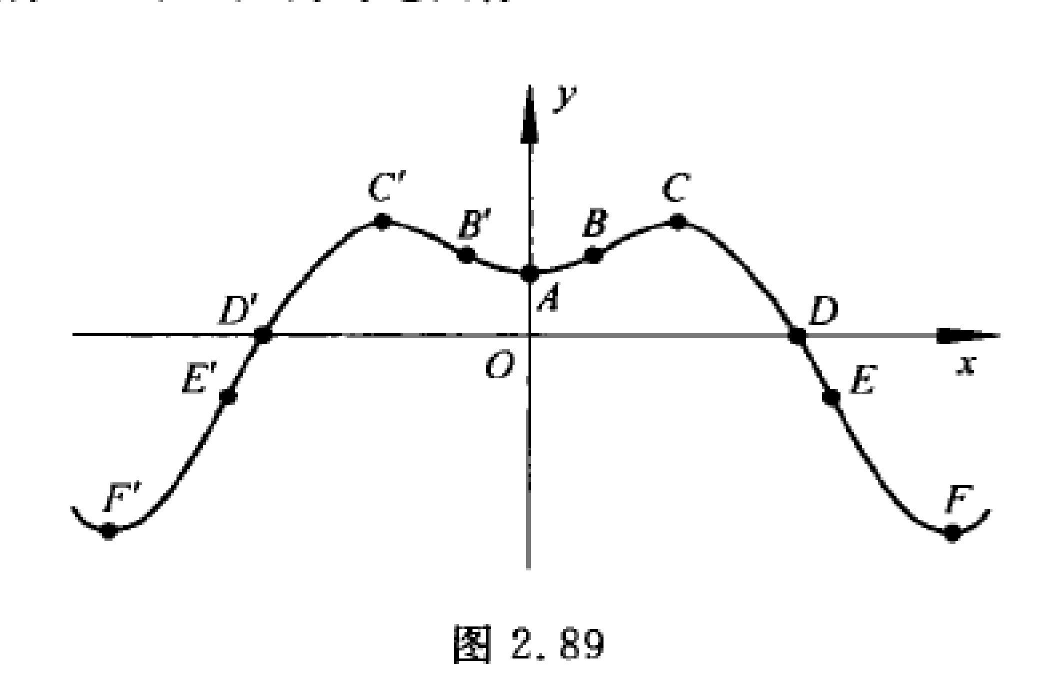


图 2.89

经判别知：点 x_1,x_2,x_3 和 x_4 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$；当 $x=\pm\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{2}$；当 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{3}{4}$.

图像如图 2.89 所示，图中主要点的坐标：

$A\left(0,\frac{1}{2}\right)$，　$B(0.18\pi,0.63)$，　$C\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$　$D(0.62\pi,0)$，　$E(0,70\pi,-0.44)$，　$F\left(\pi,-\frac{3}{2}\right)$；

点 B',C',D',E',F' 与点 B,C,D,E,F 关于 Oy 轴对称.

【1501】　$y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

提示 由于函数的图像关于 Oy 轴对称，且其周期 $T=\frac{\pi}{2}$，故建议在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 内作其图像.

解 图像关于 Oy 轴对称. 由于

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(3+\cos 4x),$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内讨论图像.

$y'=-\sin 4x$. 令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $\pm\frac{\pi}{4}$.

$y''=-4\cos 4x$. 令 $y''=0$，得 $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}$，$y_{1,2}=\frac{3}{4}$.

经判别知：点 x_1 和 x_2 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$；当 $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$.

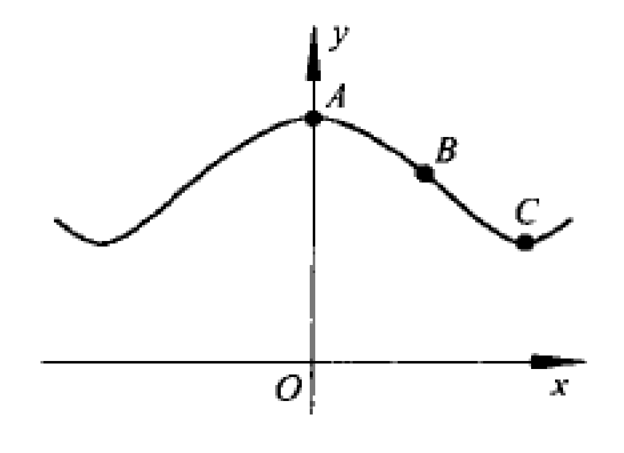


图 2.90

图像如图 2.90 所示，图中主要点的坐标： $A(0,1)$， $B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right)$， $C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

【1502】 $y=\sin x\sin 3x$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

由于 $y=\sin x\sin 3x=-\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$，故函数的周期 $T=\pi$. 在一周期 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内讨论图像.

零点处：$x=0$ 或 $\pm\frac{\pi}{3}$.

$y'=2\sin 4x-\sin 2x$，令 $y'=0$ 得 $x=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}$.

$y''=8\cos 4x-2\cos 2x$，令 $y''=0$ 得

$x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx 0.11\pi$， $y_{1,2}\approx 0.29$；

$x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}\approx\pm 0.36\pi$， $y_{3,4}\approx -0.24$.

经判别知：

点 x_1,x_2,x_3 和 x_4 均为拐点；

极小值：当 $x=0$ 时 $y=0$， 当 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 时，$y=-1$；

极大值：当 $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\approx\pm 0.21\pi$ 时，$y=\frac{9}{16}$.



图 2.91

图像如图 2.91 所示，图中主要点的坐标：

$A(0.11\pi,0.29)$， $B\left(0.21\pi,\frac{9}{16}\right)$， $C\left(\frac{\pi}{3},0\right)$， $D(0.36\pi,-0.24)$， $E\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$.

【1503】 $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

解 利用 $\sin(\pi+x)=-\sin x$，易知函数的周期 $T=\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图像.

不连续点：$x=\frac{3\pi}{4}$. 零点处：$x=0$ 或 π. 渐近线：$x=\frac{3\pi}{4}$.

$$y'=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0，$$无极值，函数递增，其图像是上升的.

$$y''=-\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}，$$令 $y''=0$ 得 $x=\frac{\pi}{4}$，对应的 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

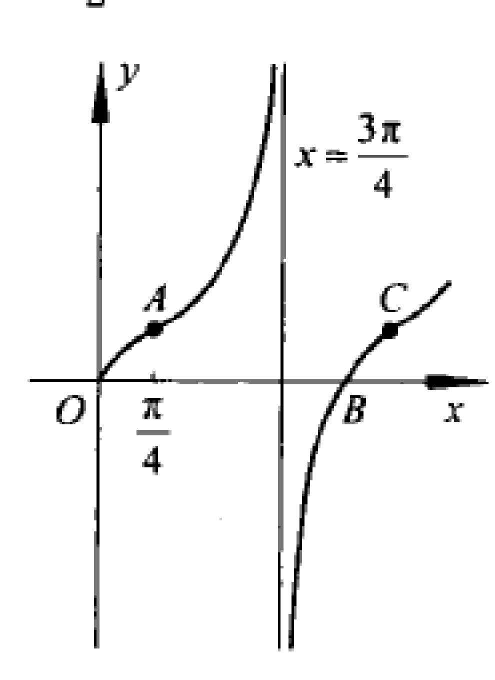


图 2.92

经判别知，它为拐点. 图像如图 2.92 所示，图中主要点的坐标：$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$， $B(\pi,0)$ 和 $C\left(\frac{5\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【1504】 $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图像关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图像.

零点处: $x=\pm\frac{\pi}{2}$. 渐近线: $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\pm\frac{3\pi}{4}$.

$y'=\frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\pi$;

$y''=\frac{1}{\cos^3 2x}[3\cos x\cos^2 2x+4\sin 2x\sin x(1+2\cos^2 x)]$, 令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

经判别知:

当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$;

当 $x=\pm\pi$ 时有极大值 $y=-1$; 点 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 均为拐点, 此时 $y=0$.

当 $0<x<\pi$ 时, $y'>0$, 函数递增, 其图像是上升的; 当 $-\pi<x<0$ 时, $y'<0$, 函数递减, 其图像是下降的.

图像如图 2.93 所示.

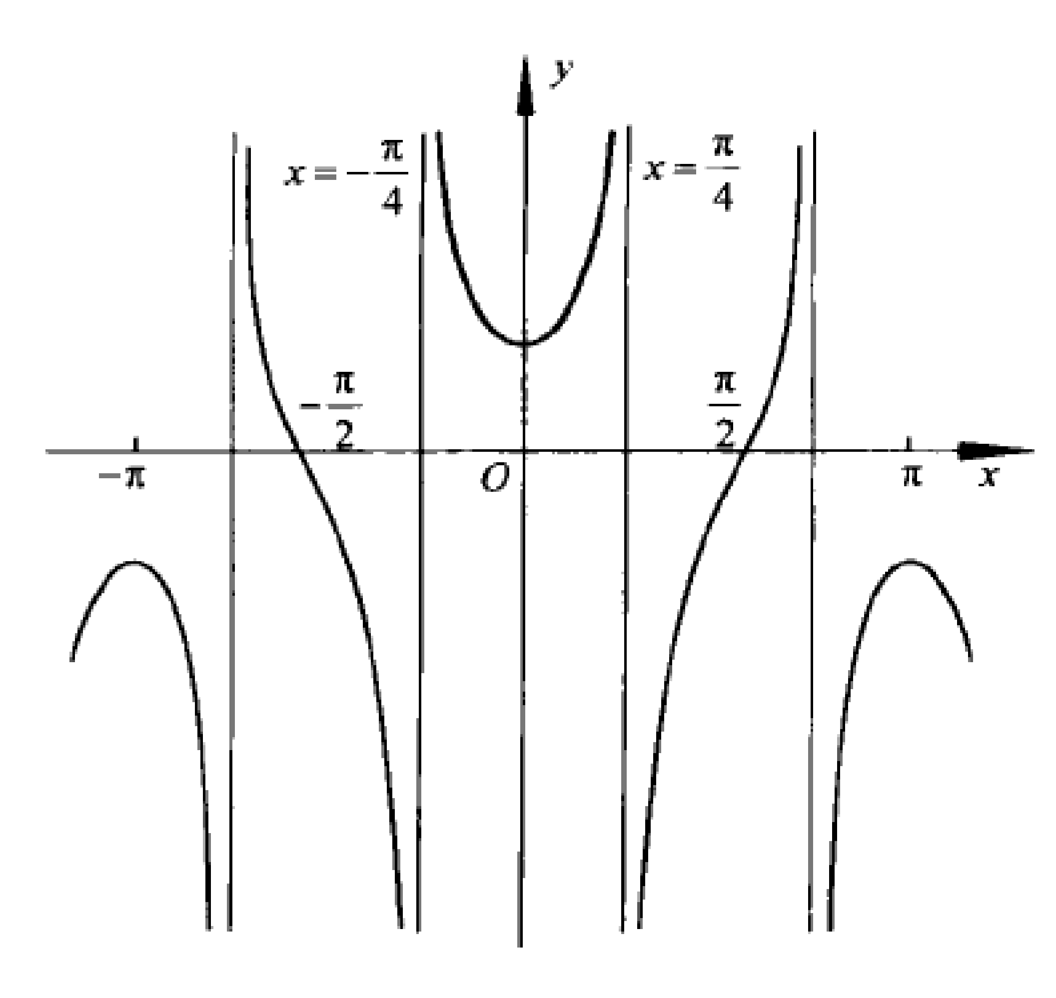


图 2.93

【1505】 $y=2x-\tan x$.

解 零点处: $x=0$ 及 $x\approx\pm0.37\pi,\cdots$. 对称中心: $(k\pi,2k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

渐近线: $x=\frac{2k+1}{2}\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$y'=2-\sec^2 x$, 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

经判别知: 当 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 时, 有极大值 $y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$;

当 $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ 时, 有极小值

$$y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

$y''=-2\sec^2 x\tan x$, 令 $y''=0$ 得 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

经判别知, 此为拐点.

图像如图 2.94 所示(仅描绘从 $-\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 区间内的图像).

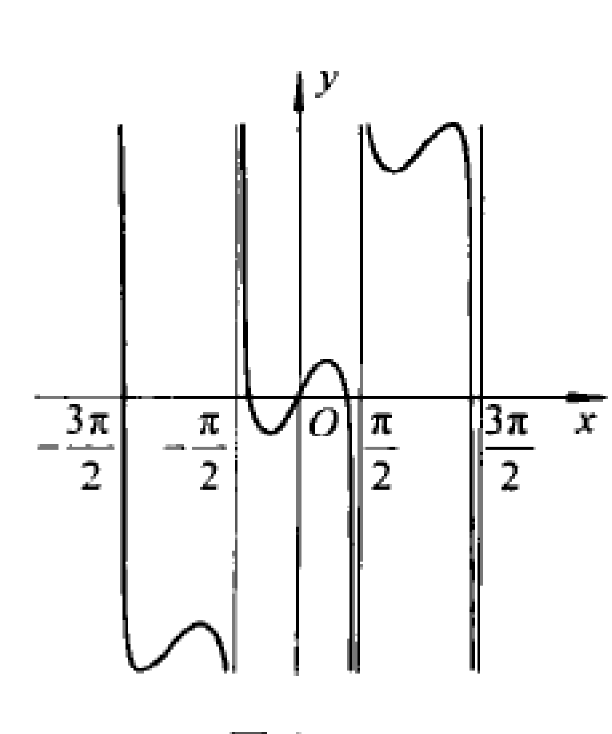


图 2.94

【1506】 $y=e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的, 故图像在 Ox 轴的上方. $y=e^{-(x-1)^2+1}$, 于是, 图像关于直线 $x=1$ 对称.

渐近线：$y=0$.

$y'=(2-2x)e^{2x-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$，

经判别知，此时有极大值 $y=e$；

$y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

经判别知，它为拐点，$y=\sqrt{e}\approx1.65$.

图像如图 2.95 所示，图中各点的位置：

图 2.95

$$A(0,1),\quad B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right),\quad C(1,e),\quad D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{e},\sqrt{e}\right).$$

【1507】 $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

解 图像关于 Oy 轴对称，在 Ox 轴的上方.

渐近线：$y=0$.

$y'=-2x^3e^{-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，经过 $x=0$ 点，导数 y'从正变负，所以，当 $x=0$ 时取极大值 $y=1$.

$y''=2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$，令 $y''=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1.22$，

经判别知，它为拐点，而 $y=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx0.56$.

图像如图 2.96 所示，图中主要点的坐标：$A(0,1)$，$B(1.22,0.56)$.

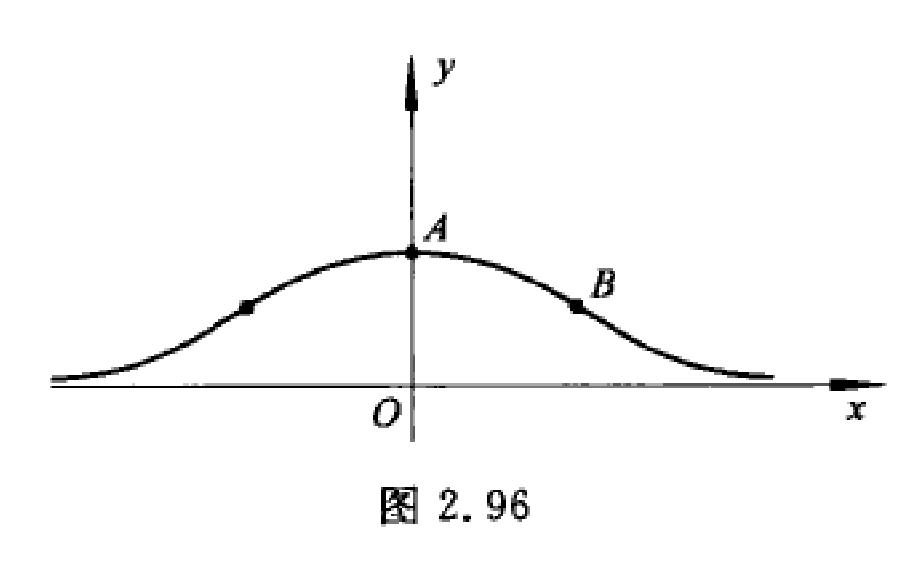


图 2.96

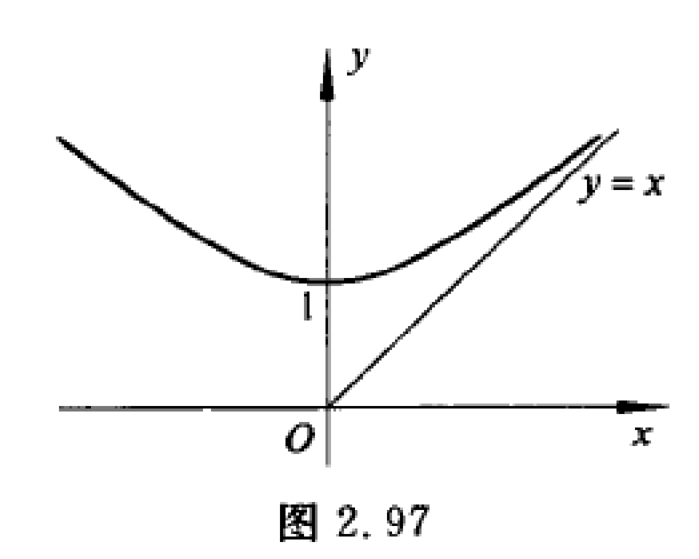


图 2.97

【1508】 $y=x+e^{-x}$.

解 $y'=1-e^{-x}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，$y=1$. $y''=e^{-x}>0$，图像是凹的，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$.

斜渐近线：$y=x$. 事实上，$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1$， $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=0$.

图像如图 2.97 所示.

【1509】 $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点处：$x=0$. 渐近线：$y=0$ （当$\to+\infty$时）.

$y'=-x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}\left(x-\frac{2}{3}\right)$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{2}{3}$，当 $x=0$ 时，$y'=\infty$.

经判别知：当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$，且(0,0)点为尖点.

当 $x=\frac{2}{3}$时有极大值 $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx0.39$. 由此可知函数值始终为正的，故图像在 Ox 轴上方.

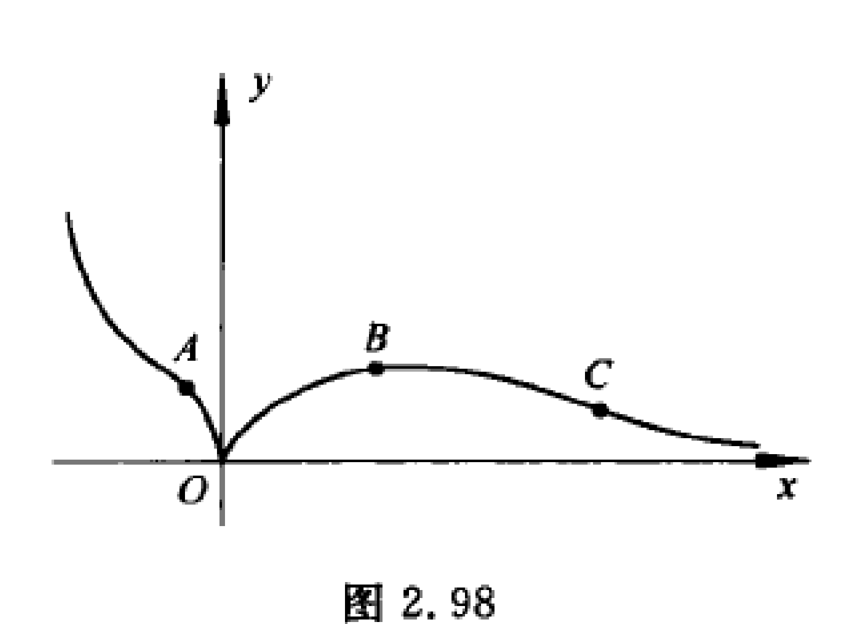


图 2.98

$y''=\frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2-12x-2)$，令 $y''=0$，得

$x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx-0.15$，$y_1\approx0.34$， $x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx1.48$，$y_2\approx0.30$，经判别知，它们均为拐点.

图像如图 2.98 所示，图中主要点的坐标：

$$A(-0.15,\ 0.34),\quad B\left(\frac{2}{3},0.39\right),\quad C(1.48,\ 0.30).$$

【1510】 $y=\frac{e^x}{1+x}$.

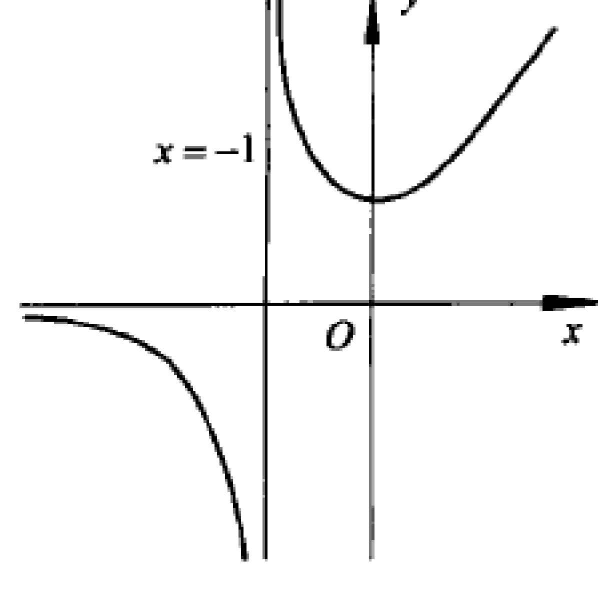


图 2.99

解 当 $x<-1$ 时，函数值为负的，当 $x>-1$ 时，函数值为正的.

不连续点：$x=-1$. 垂直渐近线：$x=-1$.

又水平渐近线：$y=0$（当 $x\to-\infty$时）. 事实上，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=0.$$

$y'=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$. 经判别知，此时有极小值 $y=1$.

$y''=\frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}$，当 $x<-1$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；当$x>-1$时，$y''>0$，故图像是凹的. 图像如图 2.99 所示.

【1511】 $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

零点处：$x=0$. 函数值不为负. 当 $x=0$ 时有最小值 $y=0$. 渐近线：$y=1$.

$$y'=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$ 当 $x<0, y'<0$；当 $x>0, y'>0$.

$$y''=e^{-x^2}\frac{1-3x^2-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t)=1-3t-e^{-t}+2te^{-t}(0\leqslant t<+\infty)$，易证 $g(t)\leqslant 0$.

于是，对于 $x\neq 0$，恒有 $y''<0$，即图像呈凸状. 而(0,0)点为尖点（图 2.100）.

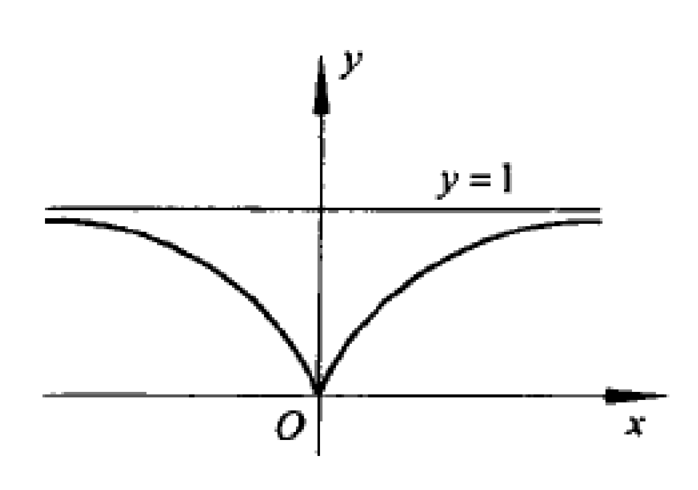


图 2.100

【1512】 $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域：$x>0$. 零点处：$x=1$. 渐近线：$x=0(x\to+0)$，$y=0(x\to+\infty)$.

$y'=\frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，令 $y'=0$ 得 $x=e^2\approx 7.39$. 经判别知，此时有极大值 $y=\frac{2}{e}\approx 0.74$.

$y''=\frac{3\ln x-8}{4x^{\frac{5}{2}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=e^{\frac{8}{3}}\approx 14.39$，经判别知，此为拐点，此时 $y=\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx 0.70$.

图像如图 2.101 所示. 图中主要点的坐标：$A(1, 0)$，$B(7.39, 0.74)$，$C(14.39, 0.70)$.

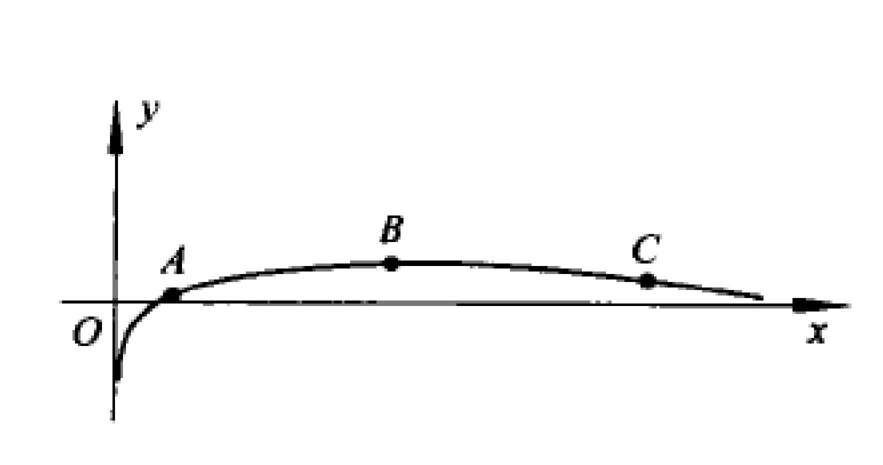


图 2.101

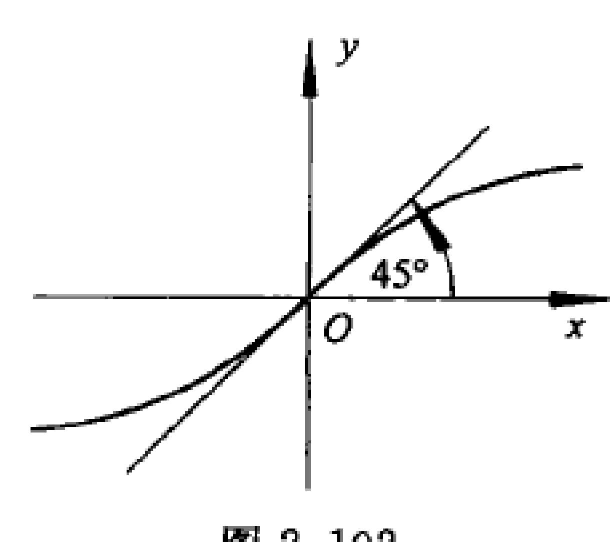


图 2.102

【1513】 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，故图像关于坐标原点对称. 零点处：$x=0$.

$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$，故函数递增，其图像始终上升，无极值点.

$y''=\frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$，令 $y''=0$，得 $x=0$，在此点切线斜率为$k=1$.

经判别知，此为拐点，此时 $y=0$. 图像如图 2.102 所示.

【1514】 $y=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 图像关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

$$y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad y''=\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图像是凹的. 当 $x<0$ 时，由对称性知图像是凸的. 于是，点$x=0$为拐点，在此点切线斜率为 $k=1$.

从而，函数图像始终上升，如图 2.103 所示.

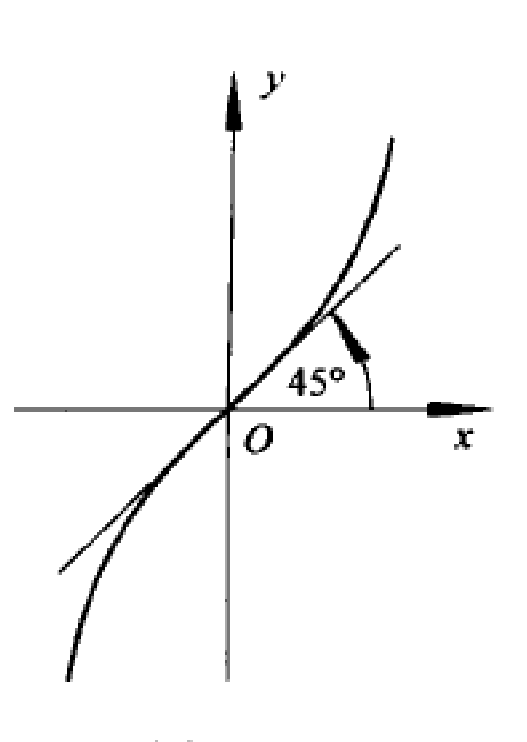


图 2.103

【1515】 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 图像关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$. 存在域：$|x|<1$. 渐近线：$x=\pm1$.

$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0$ （$|x|<1$），故函数递增，其图像始终上升.

$y''=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$y''<0$，故图像是凸的. 当 $0<x<1$ 时，$y''>0$，故图像是凹的. 点 $x=0$ 为拐点，在此点切线斜率为 $k=1$.

图像如图 2.104 所示.

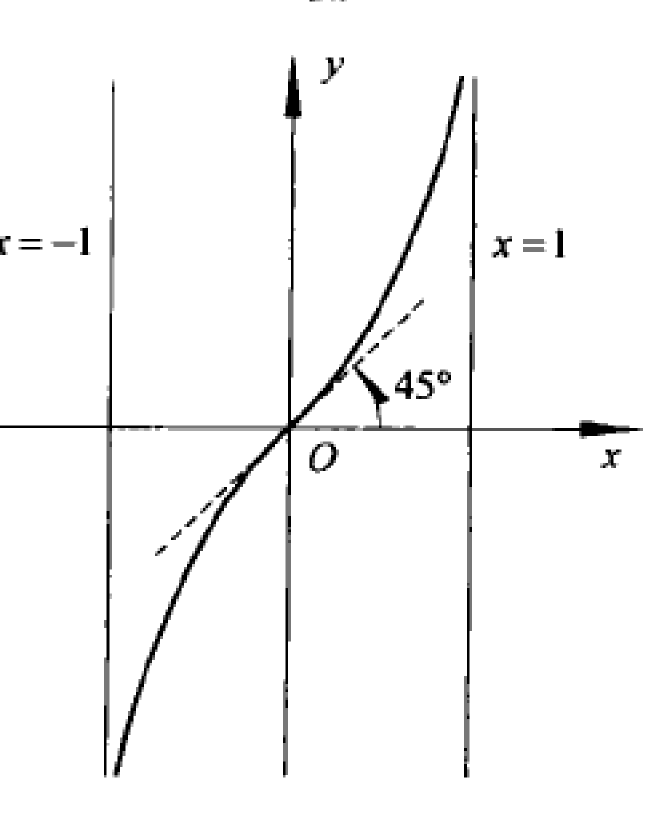


图 2.104

【1516】 $y=x+\arctan x$.

解 图像关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

渐近线：$y=x-\frac{\pi}{2}$，$y=x+\frac{\pi}{2}$. 事实上，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$，

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=-\frac{\pi}{2},\quad b_2=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\frac{\pi}{2}.$$

$y'=1+\frac{1}{1+x^2}>0$，故函数递增，图像始终上升，无极值点.

$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. 令 $y''=0$ 得 $x=0$，经判别知，它为拐点，在此点切线斜率为 $k=2$.

图像如图 2.105 所示.

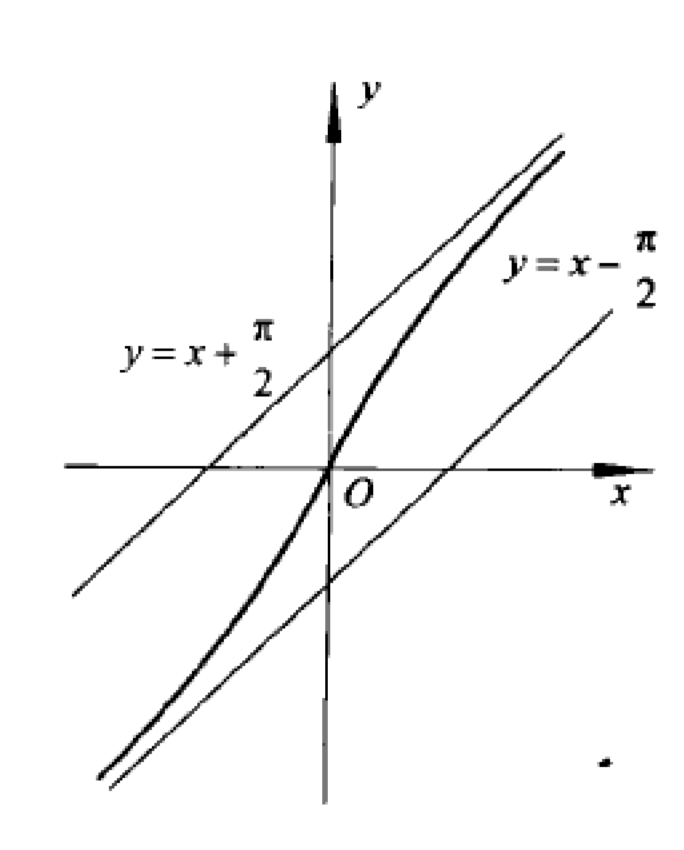
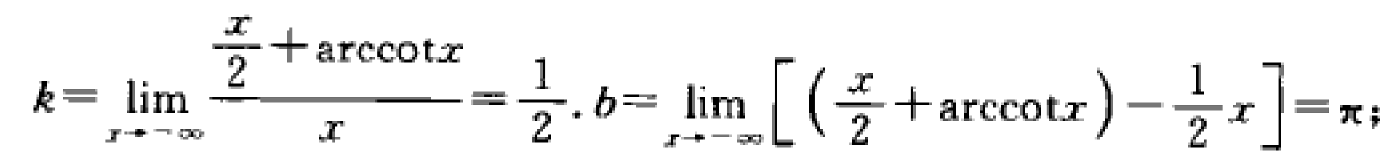


图 2.105

【1517】 $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arccot}x$.

解 零点处：$x\approx-5.95$.

渐近线：$y=\frac{x}{2}+\pi$. 事实上，



$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{2}+\operatorname{arccot}x}{x}=\frac{1}{2}.\ b=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arccot}x\right)-\frac{1}{2}x\right]=\pi;$$

同法还可得渐近线 $y=\frac{x}{2}$（当 $x\to+\infty$时）.

$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$.

当 $x<-1$ 及当 $x>1$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升；

当$-1<x<1$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降；

故当 $x=1$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx1.285$，

当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx1.856$.

$y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$y''<0$，故图像是凸的.

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图像是凹的.

从而有拐点 $x=0$，此时 $y=\frac{\pi}{2}$，$y'=-\frac{1}{2}$.

图像如图 2.106 所示.

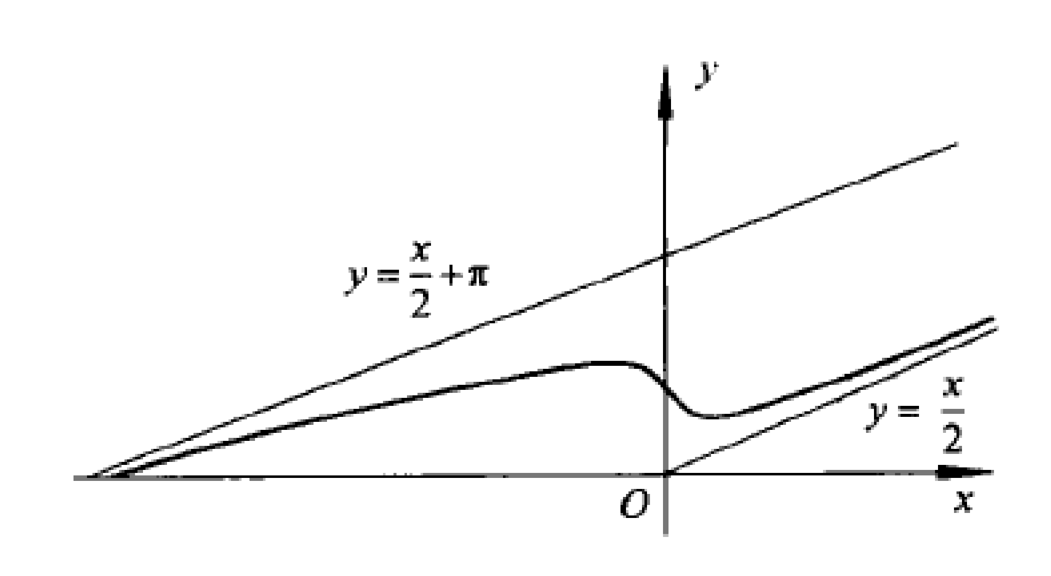


图 2.106

【1518】 $y=x\arctan x$.

解 零点处：$x=0$. 图像关于 Oy 轴对称.

函数值不为负，故图像始终在 Ox 轴上方.

渐近线：

$y=-\frac{\pi}{2}x-1$（当 $x\to-\infty$时）；$y=\frac{\pi}{2}x-1$（当 $x\to+\infty$时）.

$y'=\frac{x}{1+x^2}+\arctan x$，令 $y'=0$ 得 $x=0$. 当 $x<0$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降；当 $x>0$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升，故当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$.

$y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0$，图像是凹的.

图像如图 2.107 所示.

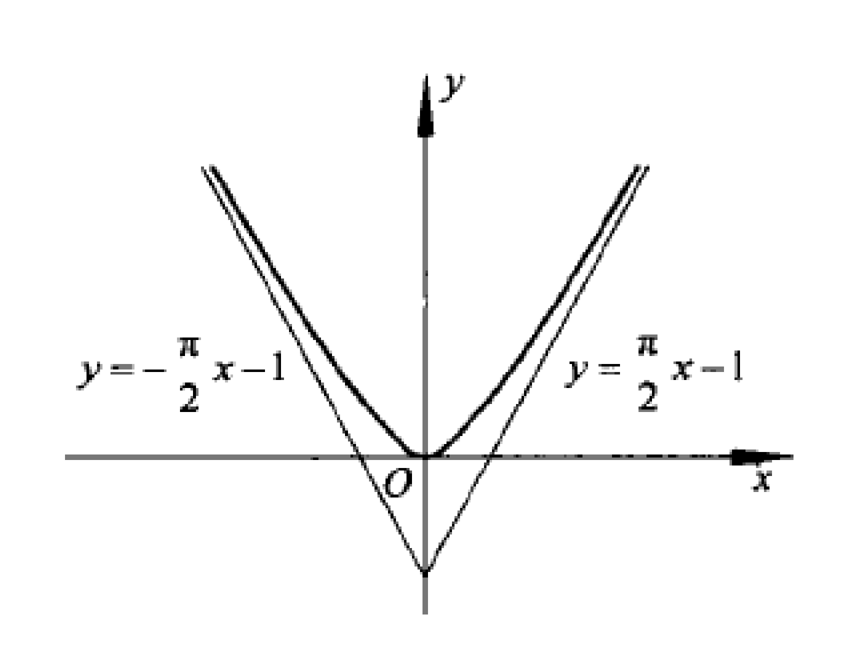


图 2.107

【1519】 $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

解 零点处：$x=0$. 图像关于坐标原点对称. 渐近线：$y=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.\quad y'=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}\quad(|x|\neq1).$$

当 $|x|<1$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升，

当 $|x|>1$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降，

当 $x=1$ 时，直接从定义出发，可得 $y'_-(1)=1$，$y'_+(1)=-1$，

故点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 为角点，且当 $x=1$ 时有最大值 $y=\frac{\pi}{2}$.

利用对称性可知点 $\left(-1,-\frac{\pi}{2}\right)$ 也为角点，且当 $x=-1$ 时有最小值 $y=-\frac{\pi}{2}$；

$$y'_-(-1)=-1,\ y'_+(-1)=1.$$

当 $x=0$ 时，$y'=2$. 又点 $x=0$ 为拐点.

图像如图 2.108 所示.

图 2.108

【1520】 $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 零点处：$x=0$. 图像关于 Oy 轴对称. 函数值不为负，故图像始终在 Ox 轴上方.

渐近线：$y=\pi$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi.$$

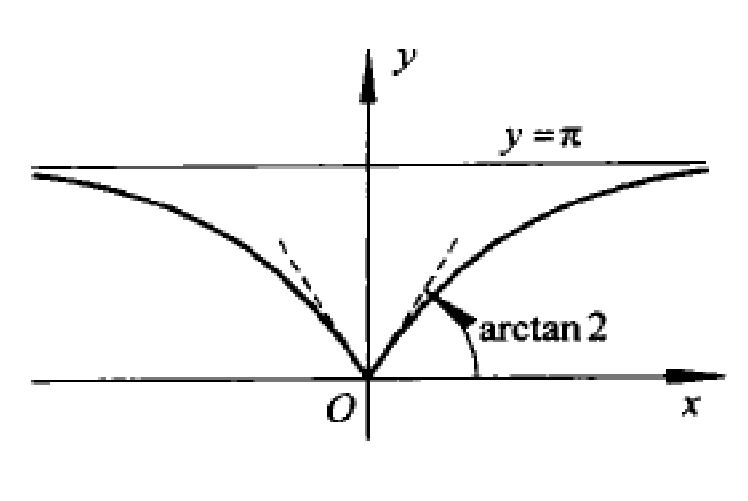


图 2.109

$y'=\dfrac{2}{1+x^2}>0\ (x>0)$，函数递增，其图像上升. 当 $x=0$ 时，直接从定义出发，得 $y'_+(0)=2$.

由对称性知，$y'_-(0)=-2$，且当 $x<0$ 时，函数递减，其图像下降，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$. 此点为角点.



$y''=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}<0\ (x>0)$，图像是凸的. 由对称性知，当 $x<0$ 时，图像也是凸的. 图像如图 2.109 所示.



【1521】 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处：$x=-2$. 不连续点：$x=0$. 渐近线：$y=x+3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[3+x+o\left(\frac{1}{x}\right)-x\right]=3.$$

$$y'=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right).\ 令\ y'=0\ 得\ x=2\ 或\ -1.$$

当 $0<x<2$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降；当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降；

当 $x<-1$ 及 $x>2$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升；

故当 $x=-1$ 时有极大值 $y=\dfrac{1}{e}\approx0.37$.

当 $x=2$ 时有极小值 $y=4\sqrt{e}\approx6.59$.

$y''=e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{5x+2}{x^4}\right)$. 令 $y''=0$ 得 $x=-\dfrac{2}{5}$，

当 $x<-\dfrac{2}{5}$ 时，$y''<0$，图像是凸的，

当 $x>-\dfrac{2}{5}\ (x\neq0)$ 时，$y''>0$，图像是凹的，故该点是拐点，

此时 $y=\dfrac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\approx0.13$.

又 $\lim\limits_{x\to0-}y=0$，$\lim\limits_{x\to0+}y=+\infty$.

图像如图 2.110 所示. 图中各点的位置：

$A(-2,0)$，　$B(-1,\ 0.37)$，　$C(-0.40,\ 0.13)$，　$D(2,\ 6.59)$.

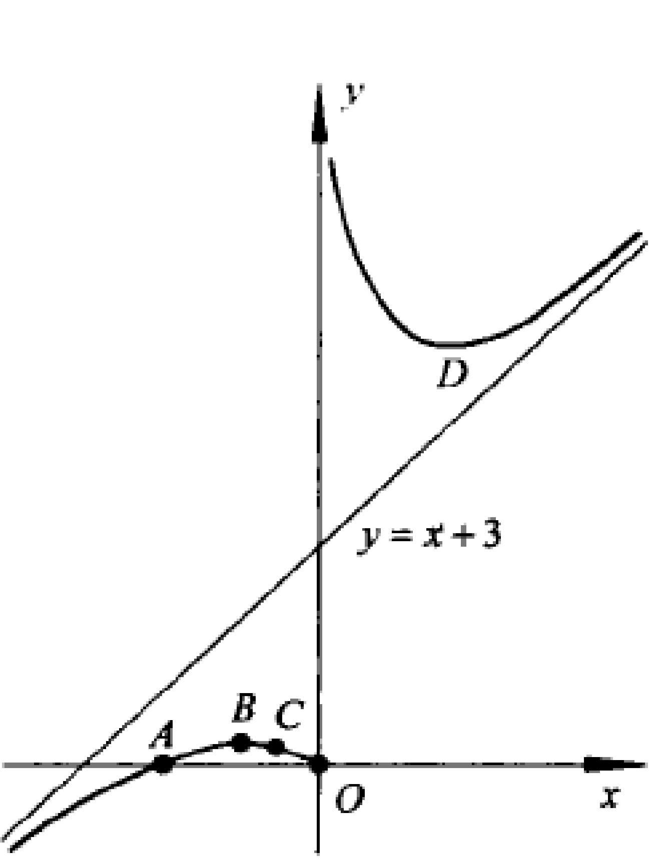


图 2.110

【1522】 $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解 存在域：$|x|\geqslant1$. 图像关于 Oy 轴对称. 渐近线：$y=1$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\right]=1.$$

当 $x=\pm1$ 时有边界的极大值 $y=2^{\sqrt{2}}\approx2.67$.

$$y'_+(1)=-\infty,\quad y'_-(-1)=+\infty.$$

$$y'(x)=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\ln2\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right),$$

故当 $x<-1$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升；$x>1$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降.

$$y''(x)=(\ln2)^2 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2+\ln2\cdot2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)$$

$$>0,$$

故图像呈凹状. 图像如图 2.111 所示.

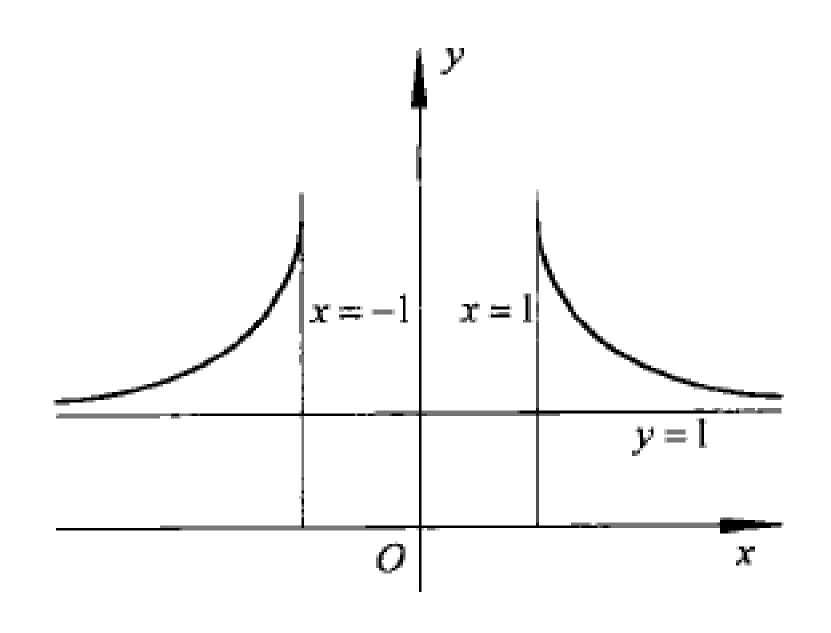


图 2.111

【1523】 $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

解 存在域：$x<1$ 及 $x>2$. 与坐标轴的交点：$(0,\ln 2)$及$\left(\frac{1}{3},0\right)$.

渐近线：$y=0$. 事实上，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}}{x}=0$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=0$.

$y'=\frac{3x^2-2x-3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$，令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1-\sqrt{10}}{3}\approx-0.72$(另一根不在存在域内)，经判别知，当 $x\approx-0.72$ 时有极大值 $y\approx1.12$.

$y''=\frac{-6x^5+15x^4-30x^2+30x-13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}$，

令 $y''=0$ 得 $x\approx-1.52$. 经判别知，它为拐点，此时 $y\approx0.99$.

当 $x<-1.52$ 时，$y''>0$，图像是凹的.

当 $x>2$ 时，$y''<0$，图像是凸的.

当 $x\to1-0$ 及 $x\to2+0$时，$y\to-\infty$.

图像如图 2.112 所示. 图中主要点的坐标：

$A(-1.52,\ 0.99)$， $B(-0.72,\ 1.12)$，

$C(0,\ \ln 2)$， $D\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$.

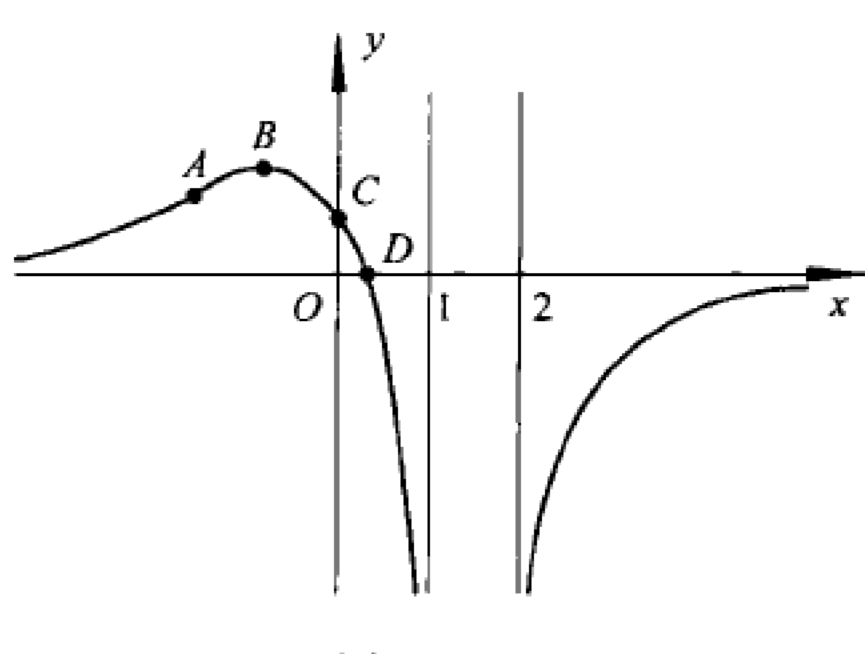


图 2.112

【1524】 $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}\quad(a>0)$

解 存在域：$|x|\leqslant a$. 与坐标轴交点：$(0,-a)$及$(0.67a,0)$.

当 $x=-a$ 时有边界的极小值 $y=-\frac{\pi}{2}a$. 当 $x=a$ 时有边界的极大值 $y=\frac{\pi}{2}a$.

$y'=\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}>0$ (当 $|x|<a$ 时)，

故函数递增，其图像上升. 又

$$y'_-(a)=+\infty,\quad y'_+(-a)=0,\quad y''=\frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0\quad(|x|<a),$$

故图像是凹的.

图像如图 2.113 所示. 图中主要点的坐标：

$A\left(-a,-\frac{\pi}{2}a\right)$， $B(0,-a)$， $C(0.67a,0)$， $D\left(a,\frac{\pi}{2}a\right)$.

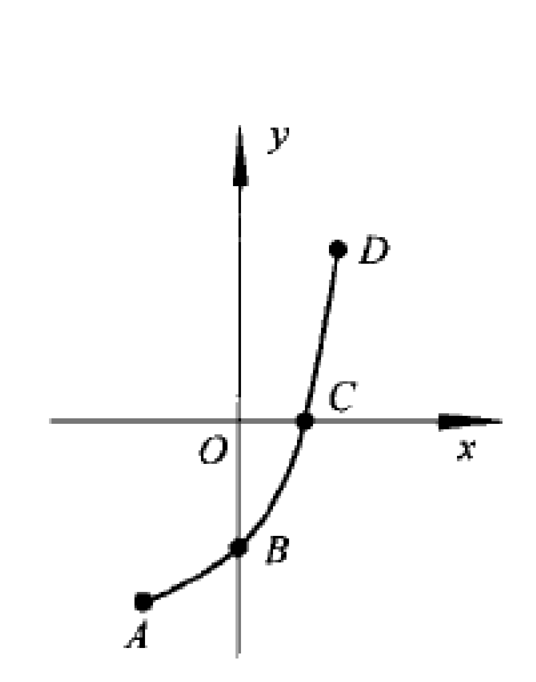


图 2.113

【1525】 $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域：$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|\leqslant1$，两端平方之，解得 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant\frac{2}{3}$.

渐近线：$y=\frac{\pi}{3}$. 事实上，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arccos\dfrac{1-x}{1-2x}}{x}=0$，　$b=\lim\limits_{x\to\infty}\arccos\dfrac{1-x}{1-2x}=\dfrac{\pi}{3}$.

当 $x=0$ 时有边界的极小值 $y=0$. 当 $x=\frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y=\pi$.

$$y'=-\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},\qquad y''=\begin{cases}\dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2}(9x-12x^2-1), & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2}(12x^2-9x+1), & x\geqslant\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$y''<0$，图像是凸的；当 $x\geqslant\frac{2}{3}$ 时，$y''>0$，图像是凹的.

又当 $x<0$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降；当 $x>\frac{2}{3}$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像也下降；

$$y'_-(0)=-\infty,\quad y'_+\left(\frac{2}{3}\right)=-\infty.$$

图像如图 2.114 所示.

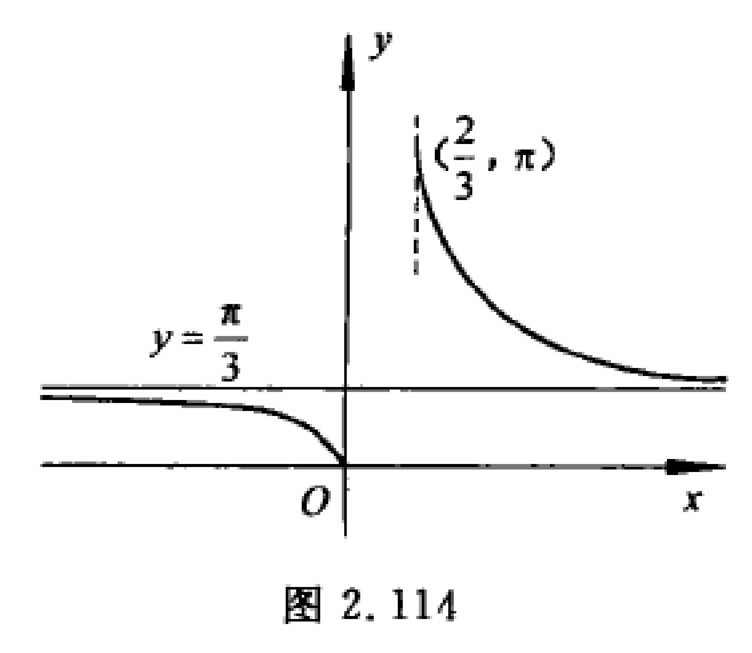


图 2.114

图 2.115

【1526】 $y=x^x$.

解　一般只讨论 $x>0$. 函数值始终为正的，故图像在 Ox 轴的上方.

$y'=x^x(1+\ln x)$. 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0.368$. 经判别知，此时有极小值 $y=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\approx 0.692$.

$y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]>0$，图像是凹的. 当 $x=+0$ 时有边界极大值 $y=1$（利用洛必达法则求得）.

图像如图 2.115 所示.

【1527】 $y=x^{\frac{1}{x}}$.

解　一般只讨论 $x>0$.

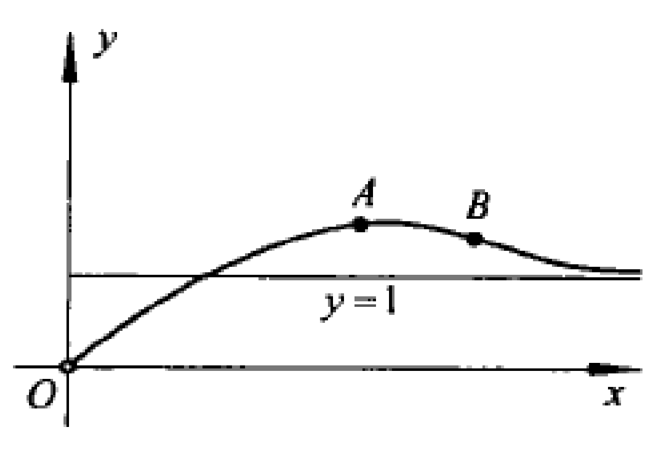


图 2.116

渐近线：$y=1$. 事实上，$k=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}-1}=0$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

当 $x=+0$ 时有边界的极小值 $y=0$.

$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. 令 $y'=0$ 得 $x=\mathrm{e}$.

当 $x<\mathrm{e}$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降.



当 $x=\mathrm{e}$ 时有极大值 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\approx 1.445$.

$y''=x^{\frac{1}{x}-4}(1-2\ln x+\ln^2 x-3x+2x\ln x)$，令 $y''=0$ 得 $x\approx\mathrm{e}^{1.47}(\approx 4.35)$.

当 $0<x<\mathrm{e}^{1.47}$ 时，$y''<0$，图像是凸的.

当 $x>\mathrm{e}^{1.47}$ 时，$y''>0$，图像是凹的，故 $x=\mathrm{e}^{1.47}$ 是拐点，$y\approx 1.402$.

图像如图 2.116 所示. 图中各点位置：$A(\mathrm{e},\ 1.445)$，$B(4.35,\ 1.402)$.

【1528】 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 存在域：$x>-1, x\neq 0$. 函数值为正的，故图像在 Ox 轴上方.

$$y'=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right],$$

易证 $\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)<0$，故 $y'<0$，从而，函数递减，其图像下降.

渐近线：$x=-1$ 和 $y=1$. 图像是凹的. $x=0$ 为“可去”不连续点.

图像如图 2.117 所示.

图 2.117

【1529】 $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x (x>0)$.

解 $y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x+x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]>0$,

易证 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0\ (x>0)$，故 $y'>0$，从而函数递增，其图像上升.

当 $x\to+0$ 时，有边界的极小值 $y=0$.

渐近线：$y=\mathrm{e}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\mathrm{e}\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

图像如图 2.118 所示.

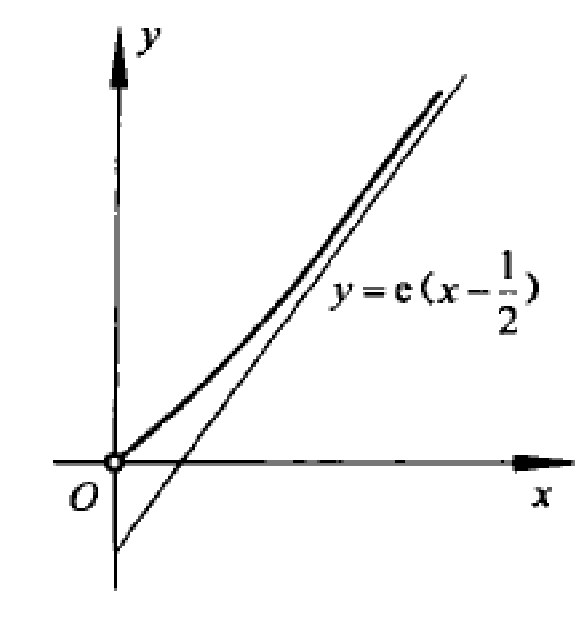


图 2.118

【1530】 $y=\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{1-x^2}}}{1+x^2}$ （不研究凹凸性）.

解 函数值始终为正的，故图像在 Ox 轴的上方. 图像关于 Oy 轴对称.

不连续点：$x=1$ 及 $x=-1$.

$y'=\frac{2x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}(3-x^2)}{(1-x^2)^2(1+x^2)^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{3}$. 经判别知：

当 $x=0$ 时有极小值 $y=\mathrm{e}$；

当 $x=-\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.15$；

当 $x=\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.15$.

渐近线：$y=0$；$x=-1$ 及 $x=1$；

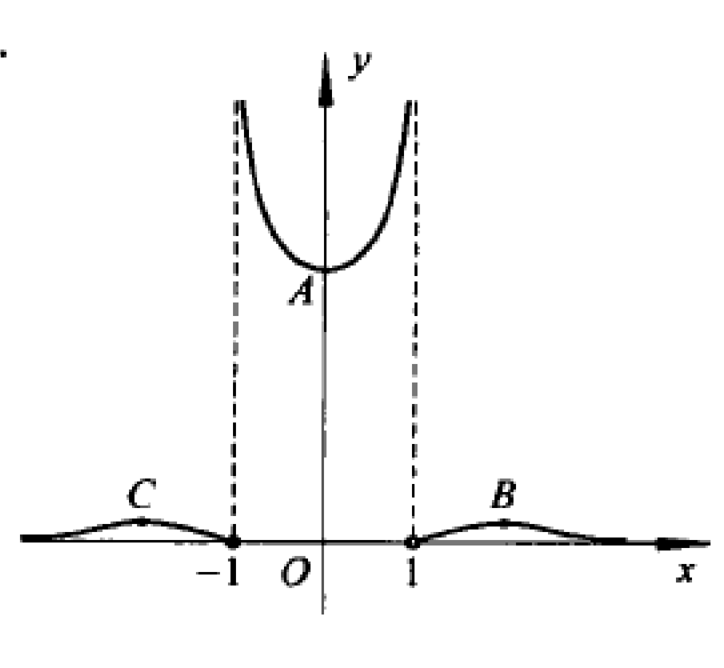


图 2.119

图像如图 2.119 所示. 图中主要点的坐标：$A(0,\mathrm{e})$，$B(\sqrt{3}, 0.15)$，$C(-\sqrt{3}, 0.15)$

作出下列参数方程所表示的曲线：

【1531】 $x=\frac{(t+1)^2}{4}$，$y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x}=\frac{|t+1|}{2},\quad \sqrt{y}=\frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t\geqslant 1$ 时，$\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y}=\frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \quad (x\geqslant 1, x>y); \qquad (1)$$

当 $t\leqslant -1$ 时，$\sqrt{x}=\frac{-t-1}{2}$，$\sqrt{y}=\frac{1-t}{2}$. 因而，

$$\sqrt{y}-\sqrt{x}=1 \quad (y\geqslant 1, y>x); \qquad (2)$$

当 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 时，$\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y}=\frac{1-t}{2}$. 相加得

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1). \qquad (3)$$

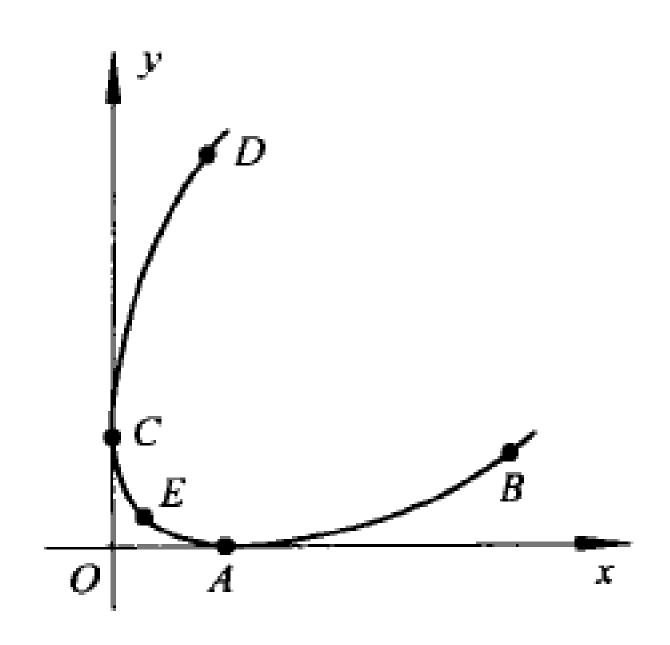


图 2.120

由方程(1)，(2)及(3)即得所给曲线的图像. 图像关于 $y=x$ 对称，如图 2.120 所示. 图中主要点的坐标：

$$A(1,0),\quad B(4,1),\quad C(0,1),\quad D(1,4),\quad E\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right).$$

【1532】 $x=2t-t^2$， $y=3t-t^3$.

解 $x'_t=2(1-t)$， $y'_t=3(1-t^2)$. 令 $x'_t=0$，$y'_t=0$，得 $t=\pm 1$.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1,1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1,+\infty)$	−	−	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t)$ $(t\neq 1)$. 令 $\frac{dy}{dx}=0$ 得 $t=-1$，此时 $x=-3$，$y=-2$.

由于 $t=1\pm\sqrt{1-x}$，故存在域为 $x\leqslant 1$，且图像有两支，

又因 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1-t)}$，故当 $t>1$ 时图像呈凸状，而当 $t<1$ 时图像呈凹状.

当 $x=0$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y=0$ 或 $y=-2$

当 $y=0$ 时，$t=0$，$+\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$，此时 $x=0$，0.464 或 -6.464.

图像如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标：

$A(-6.464, 0)$， $B(-3,-2)$， $D(1, 2)$， $E(0,-2)$.

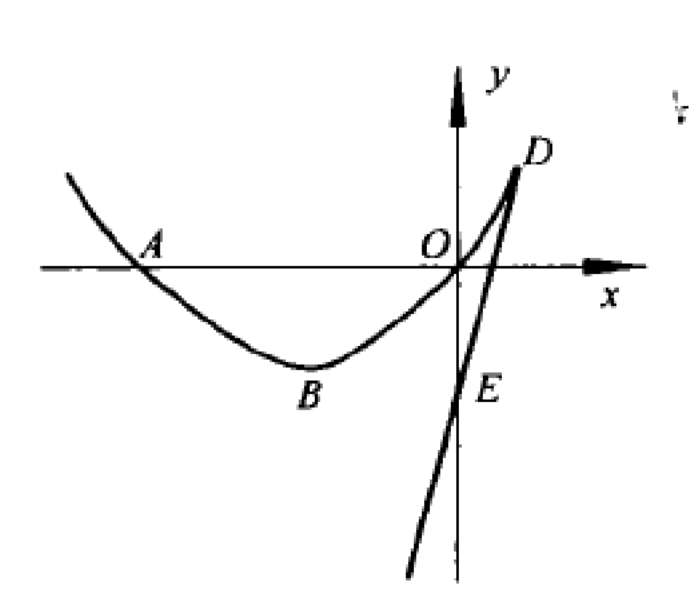


图 2.121

【1533】 $x=\frac{t^2}{t-1}$， $y=\frac{t}{t^2-1}$.

解 $x'_t=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$，$y'_t=-\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$.

考虑 $x'_t=0$，$y'_t=0$ 及 x'_t，y'_t 趋于 ∞ 的 t 值：$t=0$，± 1 及 2.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0,1)$	−	−	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1,2)$	−	−	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2,+\infty)$	+	−	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2}$,当 $x\in(-\infty,0)$及$(4,+\infty)$时,$\frac{dy}{dx}<0$,因而,函数递减,其图像下降.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}$,令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 得 $t\approx-0.33$,经判别知,此时对应于拐点$(-0.08,0.30)$.

令$\frac{dx}{dy}=0$ 得 $t=0,2$ 及-1,其中当 $t=0$ 及 2 时有垂直切线,切点为$(0,0)$及$(4,\frac{2}{3})$. 当 $t=-1$ 时 $x=-\frac{1}{2}$,此为垂直渐近线. 事实上,$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}y=\lim\limits_{t\to-1}\frac{t}{t^2-1}=\infty$.

斜渐近线为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{x}{2}\right)=-\lim_{t\to1}\frac{t(t+2)}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}.$$

又当 $x\to+\infty$时,即当 $t\to1+0$ 时,$y\to+\infty$或当 $t\to+\infty$时,$y\to0$;

又当 $x\to-\infty$时,即当 $t\to-\infty$时,$y\to0$ 或当 $t\to1-0$时,$y\to-\infty$.

总之,$\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$或 0,$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ 或$-\infty$. 图像如图2.122所示. 图中主要点的坐标:$A\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$,$B\left(4,\frac{2}{3}\right)$.

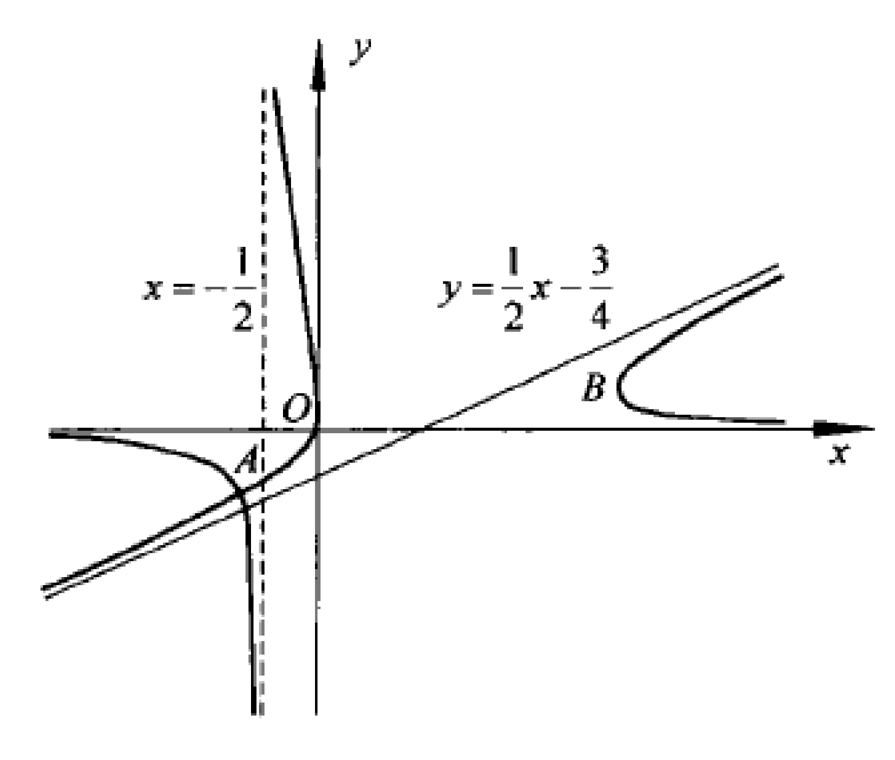


图 2.122

【1534】 $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以$-t$换t, x 及 y 值不变,故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2=\frac{x}{1+x}$,故 $x\geqslant0$ 或 $x\leqslant-1$.

$x'_t=\frac{2t}{(1-t^2)^2}$, $y'_t=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$, $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2<0$,函数递减,其图像下降.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)}$,当$|t|<1$ 时图像呈凹状,当$|t|>1$ 时图像呈凸状.

考虑 $x'_t=0$, $y'_t=0$, 及 x'_t, y'_t 趋于∞的 t 值:$t=0$,$t=1$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(0,1)$	+	−	由 0 上升到$+\infty$	由 1 下降到$\frac{1}{2}$
$(1,+\infty)$	+	−	由$-\infty$上升到-1	由$\frac{1}{2}$下降到 0

渐近线为 $y=\frac{1}{2}$. 事实上

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\pm1}\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to\pm1}\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2}.$$

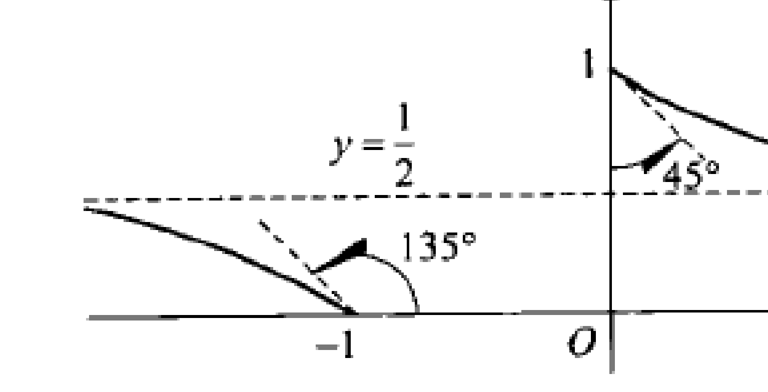


图 2.123

在点$(-1,0)$处$(t=+\infty)$，$\frac{dy}{dx}=-1$；而在点$(0,1)$处$(t=0)$仍有$\frac{dy}{dx}=-1$. 这说明在这两点处的切线均与Ox轴成135°的角. 这两点且为边界极值点.

图像如图 2.123 所示.

【1535】 $x=t+e^{-t}, y=2t+e^{-2t}$.

解 $x'_t=\frac{e^t-1}{e^t}$， $y'_t=\frac{2(e^{2t}-1)}{e^{2t}}$， $\frac{dy}{dx}=\frac{2(e^t+1)}{e^t}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2}{e^t-1}$.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图像
$(-\infty,0)$	$-$	$-$	由$+\infty$下降到1	由$+\infty$下降到1	$+$	$+$	上升，凹状
$(0,+\infty)$	$+$	$+$	由1上升到$+\infty$	由1上升到$+\infty$	$+$	$-$	上升，凸状

渐近线：$y=2x$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2t+e^{-2t}}{t+e^{-t}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}[(2t+e^{-2t})-2t-2e^{-t}]=0.$$

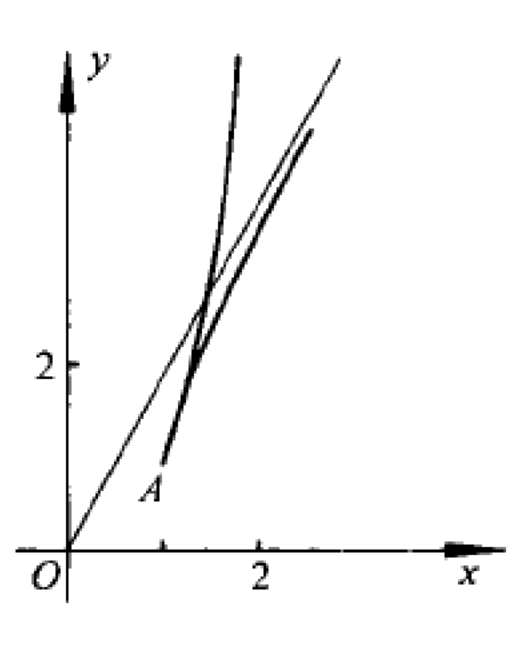


图 2.124

当$t=0$时，对应于曲线上的点$A(1,1)$，此点的导数$\frac{dy}{dx}=4$. 当$t=-\ln 2$时，曲线与渐近线相交. 图像如图 2.124 所示.

【1536】 $x=a\cos 2t$， $y=a\cos 3t$ $(a>0)$.

解 由于$a\cos 2(t+2\pi)=a\cos 2t$及$a\cos 3(t+2\pi)=a\cos 3t$. 因此，我们只须考虑t在$(0,2\pi)$内变化时，x及y的变化情况.

$$x'_t=-2a\sin 2t,\quad y'_t=-3a\sin 3t,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3\sin 3t}{2\sin 2t}.$$

考虑$x'_t=0$，$y'_t=0$的值：$t=0$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$，π，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{3}$，及2π.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图像
$(0,\frac{\pi}{3})$	$-$	$-$	由a下降到$-\frac{a}{2}$	由a下降到$-a$	$+$	上升
$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$	$-$	$+$	由$-\frac{a}{2}$下降到$-a$	由$-a$上升到0	$-$	下降
$(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$	$+$	$+$	由$-a$上升到$-\frac{a}{2}$	由0上升到a	$+$	上升
$(\frac{2\pi}{3},\pi)$	$+$	$-$	由$-\frac{a}{2}$上升到a	由a下降到$-a$	$-$	下降
$(\pi,\frac{4\pi}{3})$	$-$	$+$	由a下降到$-\frac{a}{2}$	由$-a$上升到a	$-$	下降
$(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$	$-$	$-$	由$-\frac{a}{2}$下降到$-a$	由a下降到0	$+$	上升
$(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3})$	$+$	$-$	由$-a$上升到$-\frac{a}{2}$	由0下降到$-a$	$-$	下降
$(\frac{5\pi}{3},2\pi)$	$+$	$+$	由$-\frac{a}{2}$上升到a	由$-a$上升到a	$+$	上升

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=-a$；

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\infty$（t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=-\infty$；从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=+\infty$），此时 $x=-a$，$y=0$；

当 $t=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=a$；

当 $t=\pi$ 时，利用洛必达法则可求得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$，此时 $x=a,y=-a$；

当 $t=0$ 时，利用洛必达法则可求得 $\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}$，此时 $x=y=a$.

图像如图 2.125 所示.

图中主要点的坐标：

$A(a,a)$，　$B(\frac{a}{2},0)$，　$C\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，　$D\left(-\frac{a}{2},-a\right)$，

$E(-a,0)$，　$F\left(-\frac{a}{2},a\right)$，　$G\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，　$H(a,-a)$.

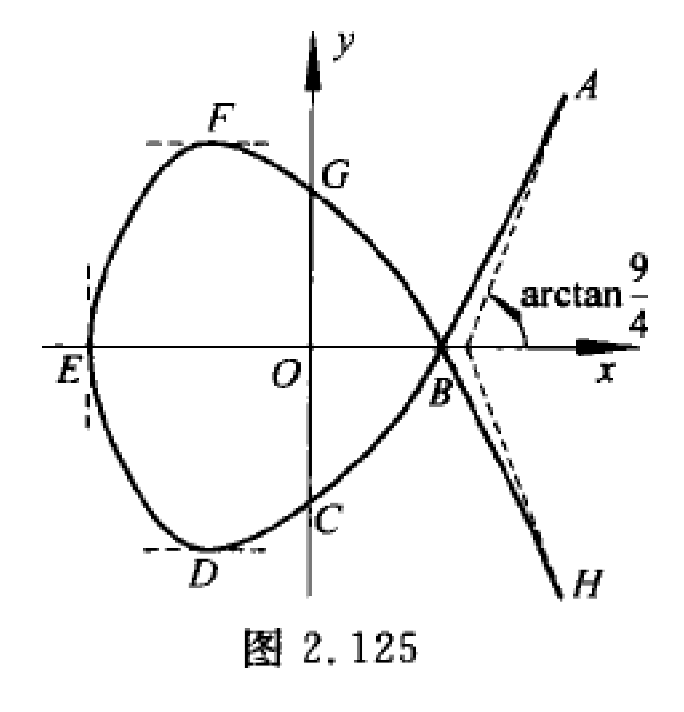


图 2.125

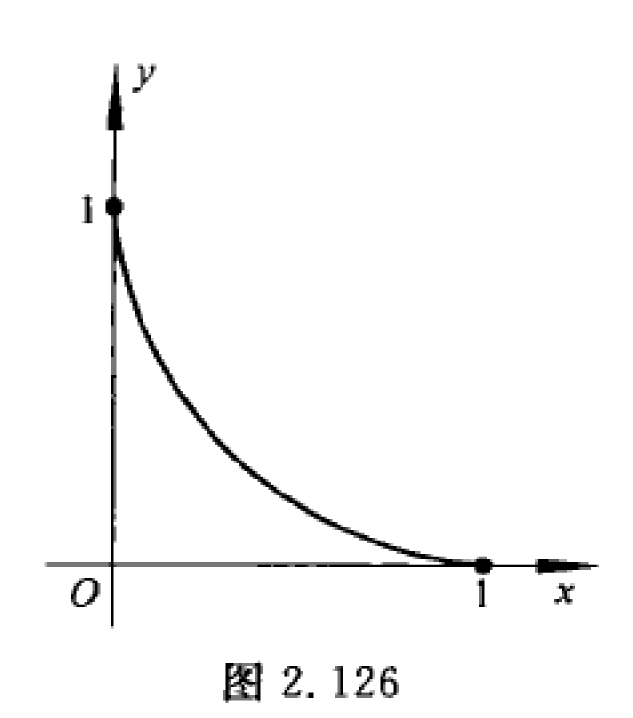


图 2.126

【1537】 $x=\cos^4 t$，$y=\sin^4 t$.

解 $\sqrt{x}=\cos^2 t$，$\sqrt{y}=\sin^2 t$，相加即得 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. 图像如图 2.126 所示*).

*) 参看 1531 题.

【1538】 $x=t\ln t$，$y=\frac{\ln t}{t}$.

解 当 $t>0$ 时，x 及 y 才有意义.

当 $0<t\leqslant 1$ 时，令 $t'=\frac{1}{t}$，则 $t'\geqslant 1$，且 $x=-\frac{\ln t'}{t'}$，$y=-t'\ln t'$，所以，图像关于直线 $x+y=0$ 对称.

以下讨论图像的极值点，凹凸性及拐点，不妨设 $t\geqslant 1$：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\ln^2 t-4}{t^3(1+\ln t)^2}.$$

令 $1-\ln t=0$，得 $t=e$. 经判别知，此时图像有极大值点：$A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

令 $\ln^2 t-2=0$，得 $t=e^{\sqrt{2}}$，相应的点 $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ 为图像的拐点.

当 $1\leqslant t\leqslant e^{\sqrt{2}}$，即当 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时，图像呈凸状. 当 $t\geqslant e^{\sqrt{2}}$，即当 $x\geqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时，图像呈凹状.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图像
$(0,\frac{1}{e})$	$-$	$+$	由 0 下降到 $-\frac{1}{e}$	由 $-\infty$ 上升到 $-e$	$-$	下降
$(\frac{1}{e},e)$	$+$	$+$	由 $-\frac{1}{e}$ 上升到 e	由 $-e$ 上升到 $\frac{1}{e}$	$+$	上升
$(e,+\infty)$	$+$	$-$	由 e 上升到 $+\infty$	由 $\frac{1}{e}$ 下降到 0	$-$	下降

曲线通过点(0,0)，在此点切线的倾角为 45°.

水平渐近线为 $y=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1}=0.$$

垂直渐近线为 $x=0$. 事实上，

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{t\to+0}y=\lim_{t\to+0}\frac{\ln t}{t}=-\infty.$$

图像如图 2.127 所示.

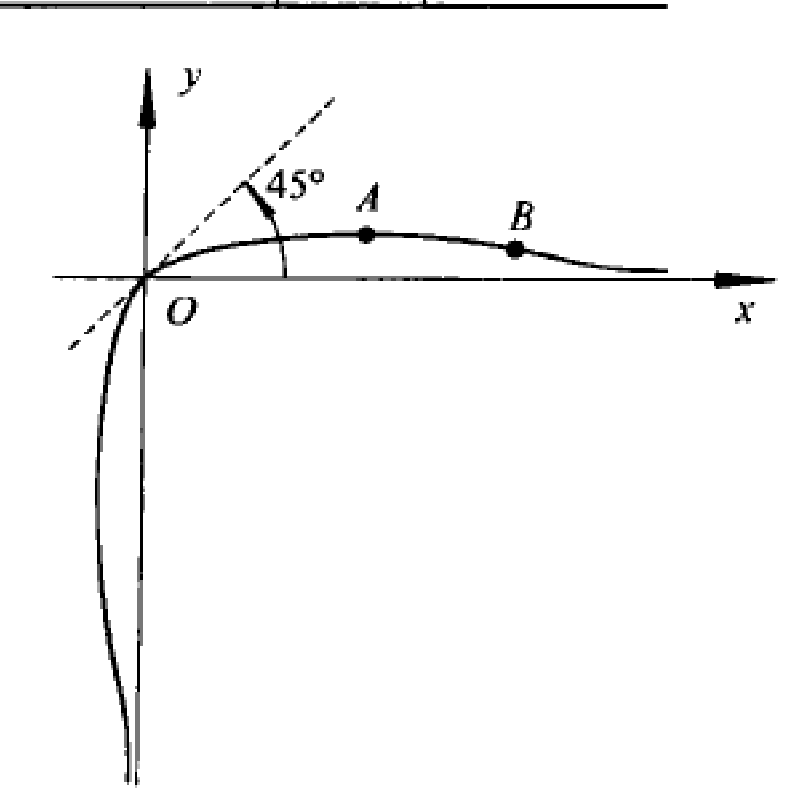


图 2.127

【1539】 $x=\dfrac{a}{\cos^3 t}$, $y=a\tan^3 t\ (a>0)$.

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程：$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.
显然，$|x|\geqslant a$ 且图像对于两坐标轴都对称，故只须考虑在第一象限部分的函数图像. 由于

$$y'=x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}},\quad y''=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}(y^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}).$$

而当 $x>0$, $y>0$ 时，有 $x>y$. 从而有 $y'>0$, $y''>0$, 故图像上升且呈凹状.

在 $(a,0)$ 点的切线的倾角为 0°.

图像如图 2.128 所示.

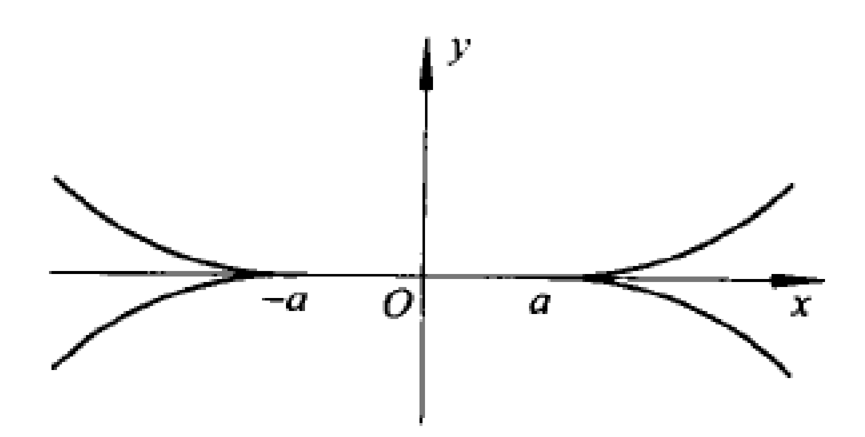


图 2.128

【1540】 $x=a(\operatorname{sh}t-t)$, $y=a(\operatorname{ch}t-1)\ (a>0)$.

解 当 t 用 $-t$ 换时，x 的大小不变符号相反，而 y 却不变，故图像对于 Oy 轴对称.

$$x'_t=a(\operatorname{ch}t-1),\quad y'_t=a\operatorname{sh}t,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^t+1}{e^t-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4e^{2t}}{a(e^t-1)^4}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图像
$(-\infty,0)$	$+$	$-$	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	$-$	$-$	下降
$(0,+\infty)$	$+$	$+$	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	$+$	$-$	上升

当 $t\to-0$ 时，$x\to-0$, $\frac{dy}{dx}\to-\infty$;

当 $t\to+0$ 时，$x\to+0$, $\frac{dy}{dx}\to+\infty$. 因此，在(0,0)点的切线垂直于 Ox 轴.

图像如图 2.129 所示.

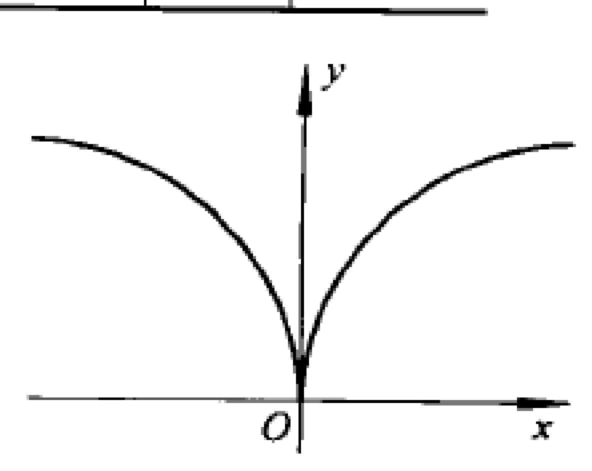


图 2.129

把下列曲线方程化为参数方程，然后作出这些曲线的图像：

【1541】 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$.

解 设 $y=tx$，代入方程，并消去 x^2，即得 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$， $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

由于 $x'_t=\dfrac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2}$，$y'_t=\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$.

考虑 $x'_t=0$，$y'_t=0$，及 x'_t，y'_t 趋于无穷的 t 值：$t=-1$，0，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$及 $\sqrt[3]{2}$.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,\ -1)$	+	−	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,\ 0)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \sqrt[3]{2})$	−	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2},\ +\infty)$	−	−	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}$，当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，$\dfrac{dy}{dx}=0$；当 $t\to+\infty$时，$x=0$，$y=0$，$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}=\infty$.

这说明，坐标原点是曲线的二重点. 曲线的一支与 Ox 轴相切，一支与 Oy 轴相切.

渐近线：$x+y+a=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}=-a.$$

图像如图 2.130 所示. 图中主要点的坐标：

$$A(a\sqrt[3]{4},a\sqrt[3]{2}),\quad B\left(\frac{3}{2}a,\frac{3}{2}a\right),\quad C(a\sqrt[3]{2},a\sqrt[3]{4}).$$

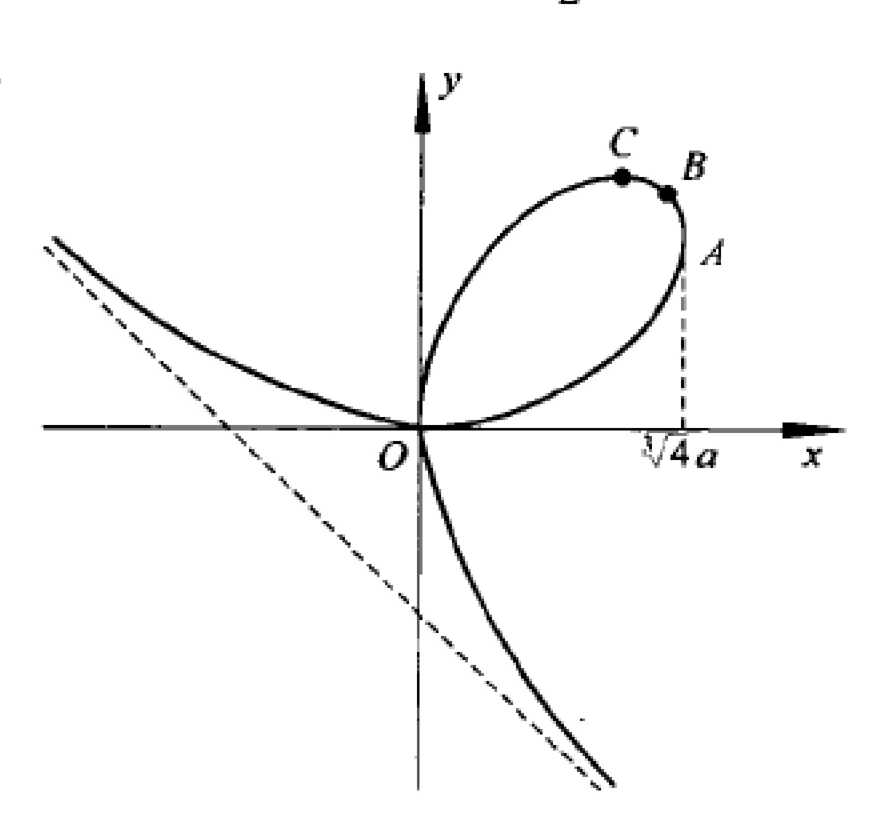


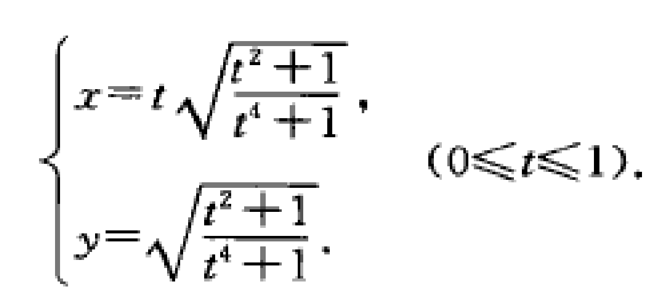
图 2.130

【1542】 $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称，同时关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=ty$，则当 $y\neq0$ 时，得 $y=\pm\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}$.


根据对称性，不妨限于考察方程


$$\begin{cases}x=t\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}},\\ y=\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}.\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant1).$$

由于 $0\leqslant x\leqslant1$，$x\leqslant y$，故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y=x$ 之间，由此根据对称性即可作出全部图像. 当 t 由 0 连续变到 1 时，曲线上的点(0,1)连续变化到点(1,1). 由于

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}+\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},\quad \frac{dy}{dt}=\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

令$\dfrac{dy}{dx}=0$，得 $t=0$，$\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 相应地，有 $x=0$，$y=1$；$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx0.71$，$y\approx1.10$.

经判别知，当 $x=0$ 时 y 取得极小值；当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，y 取得极大值. 类似地，当 $y=0$ 时，x 取得极小值 $x=1$；当

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，x 取得极大值 $x\approx1.10$.

由对称性即得知：当 $x=0$ 时，有极小值 $|y|=1$；当 $|x|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，有极大值 $|y|\approx1.10$；当 $y=0$ 时有极小值 $|x|=1$；当 $|y|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，有极大值 $|x|\approx1.10$.

值得注意的是，当 $t=1$ 时即在点(1,1)处，$\dfrac{dy}{dx}=-1$，因而，曲线在点(1,1)光滑连接.

原点(0,0)是一个孤立点，再计算几点的坐标($0\leqslant t\leqslant1$)：

作下表：

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为(−1,0)，(1,0)，(0,1)及(0,−1).

如图 2.131 所示.

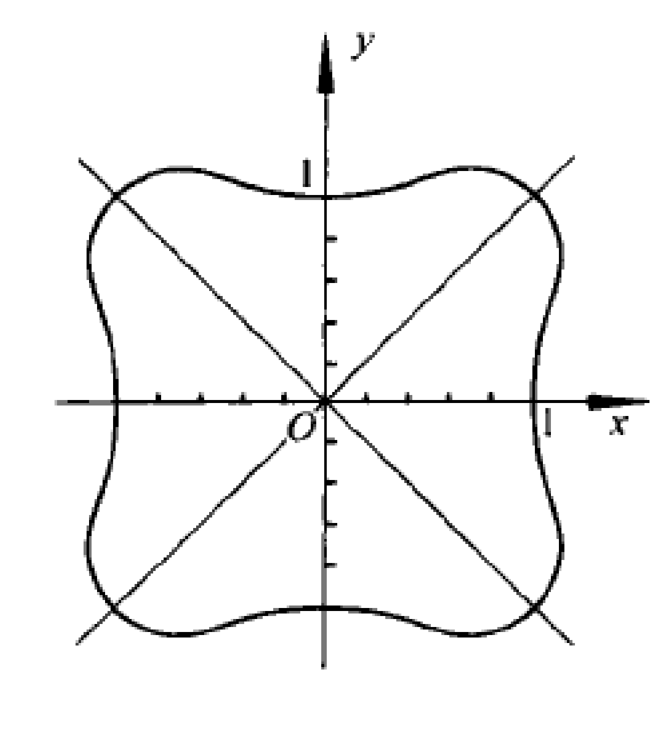


图 2.131

【1543】 $x^2y^2=x^3-y^3$.

解 设 $y=tx$，代入原方程，即得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},\quad y=\frac{1-t^3}{t}\quad(t\neq0).\quad x'_t=-\frac{2+t^3}{t^3},\quad y'_t=-\frac{1+2t^3}{t^2}.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2t^3}.$$

令 $x'_t=0$，$y'_t=0$ 及 x'_t，y'_t 趋于∞，得 $t=-\sqrt[3]{2}$，$-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，0.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\dfrac{dy}{dx}$	图像
$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	−	+	由$+\infty$下降到$\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由$-\infty$上升到$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$	−	下降
$(-\sqrt[3]{2},-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由$\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$上升到$\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0)$	+	−	由$\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$+\infty$	由$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$下降到$-\infty$	−	下降
$(0,+\infty)$	−	−	由$+\infty$下降到$-\infty$	由$+\infty$下降到$-\infty$	+	上升

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}}=\infty,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=0,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1.$$

图像通过点 $A\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}},-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$，$B\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}},-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$，及 $O(0,0)$. 如图2.132所示.

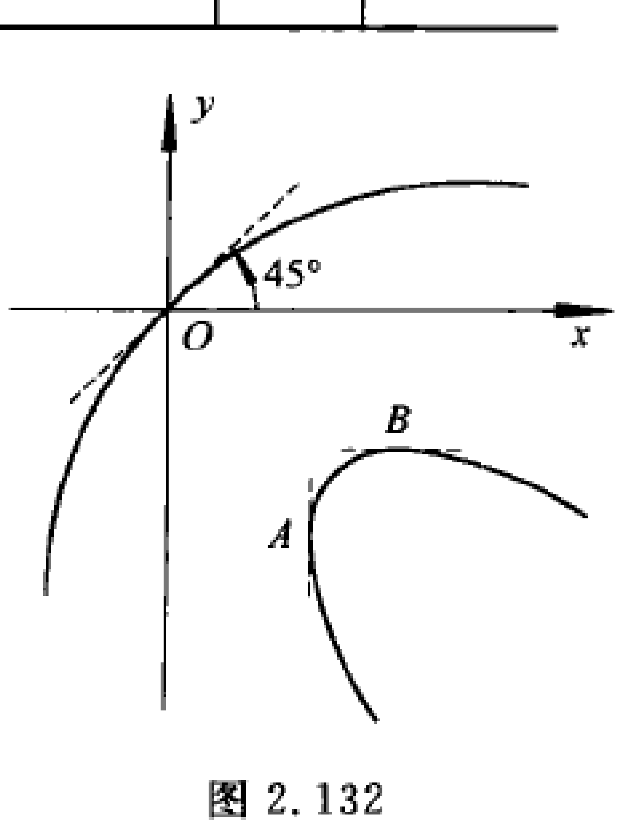


图 2.132

【1544】 $x^y=y^x\quad(x>0,y>0)$.

解 由方程显见直线 $y=x$ 是图像的一部分. 对于 $y\neq x$ 的部分，图像显然关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$，则 $y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$，即当 $x\neq y$ 时，曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(1+t)^{\frac{1}{t}},\\ y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}.\end{cases}$$

由条件 $x>0, y>0$ 知，t 满足 $-1<t<+\infty$，由于

$$\lim_{t\to -1+0} x=\lim_{t\to -1+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=+\infty,\quad \lim_{t\to -1+0} y=\lim_{t\to -1+0}(1+t)^{1+\frac{1}{t}}=1;\quad \lim_{t\to +\infty} x=1,\quad \lim_{t\to +\infty} y=+\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线. 又因 $\lim\limits_{t\to 0}x=\lim\limits_{t\to 0}y=\mathrm{e}$，故点 (e,e) 是曲线上的二重点. 由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right],\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\right],$$

于是，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+t)\left[1+\frac{t^2}{t-(1+t)\ln(1+t)}\right].$$

容易证明：$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$. 并且当 $t\in(0,+\infty)$，从而 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，恒有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$. 事实上，设

$$g(x)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t],$$

则 $g(0)=0$，并且容易证明

$$g'(t)=2t-\ln(1+t)>0,\quad (1+t)\ln(1+t)-t>0.$$

从而，有 $g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t]>0$，即 $\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}>1$.

于是，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+t)\left[1-\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}\right]<0.$$

由对称性知，对于 $t\in(-1,0)$，也有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$. 而当 $t=0$ 时，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1,$$

所以，图像始终是下降的，并呈凹状，无极值和拐点. 对应于 t 的变化范围 0 至 1.

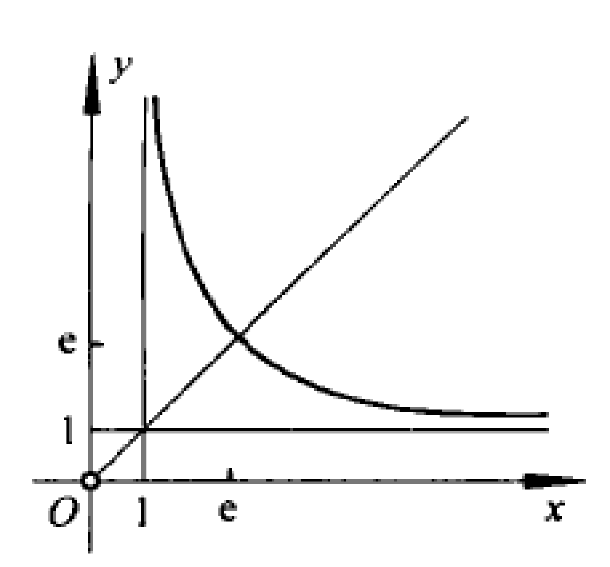


图 2.133

计算几点坐标如下：

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t\to -1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x\to +\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y\to 1$

综上所述，曲线的图像由两部分组成，一部分是直线，另一部分是对称于直线 $y=x$ 的曲线(图 2.133).

【1545】 作出曲线 $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{ch}^2y=1$ 的图像.

解 显见曲线的图像关于两坐标轴是对称的，故只须在第一象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\left(\mathrm{ch}x+\frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\mathrm{ch}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2x+1}{\mathrm{sh}^2x-1}}=1.$$

为求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)$，令

$$u=y-x=\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})-x.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x+\frac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=0$. 因此，直线 $y=x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y=0$ 时 $\mathrm{ch}y$ 取最小值 $\mathrm{ch}y=1$，所以，x 必须满足 $\mathrm{ch}^2x\geqslant 2$ 或 $|x|\geqslant\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.88$，并且当 $y=0$时，$|x|=\ln(1+\sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y)(\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y)=1,$$

从而令

$$\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=t,\quad 即\quad \operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=\frac{1}{t}.$$

所以，对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases}\operatorname{ch}x=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}}{2},\\ \operatorname{ch}y=\dfrac{\dfrac{1}{t}-t}{2},\end{cases}\quad (0<t\leqslant\sqrt{2}-1).$$

由原方程知 $\quad 2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x-2\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y\cdot y'=0\quad 或\quad y'=\dfrac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y}>0.$

因而，图像是上升的.

又由于 $\quad y''=\dfrac{(\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x)\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y-(\operatorname{sh}^2y+\operatorname{ch}^2y)\cdot y'\cdot\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}{(\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y)^2}$

$$=\frac{(\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x)\operatorname{ch}^2y\operatorname{sh}^2y-(\operatorname{sh}^2y+\operatorname{ch}^2y)\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2x}{(\operatorname{ch}y\operatorname{sh}x)^3},$$

而

$$(\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x)\operatorname{ch}^2y\operatorname{sh}^2y-(\operatorname{sh}^2y+\operatorname{ch}^2y)\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x\operatorname{ch}^2y(\operatorname{sh}^2y-\operatorname{sh}^2x)+\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y(\operatorname{ch}^2y-\operatorname{ch}^2x)$$

$$=\operatorname{ch}^2x\operatorname{ch}^2y(\operatorname{ch}^2y-\operatorname{ch}^2x)+\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y(\operatorname{ch}^2y-\operatorname{ch}^2x)=(\operatorname{ch}^2y-\operatorname{ch}^2x)(\operatorname{ch}^2x\operatorname{ch}^2y+\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y)$$

$$=-(\operatorname{ch}^2x\operatorname{ch}^2y+\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y)<0.$$

于是，$y''<0$ 恒成立. 所以，曲线呈凸状.

计算几点的坐标如下：

t	$\sqrt{2}-1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t\to 0$
x	$\ln(1+\sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x\to+\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y\to+\infty$

曲线形状如图 2.134 所示.

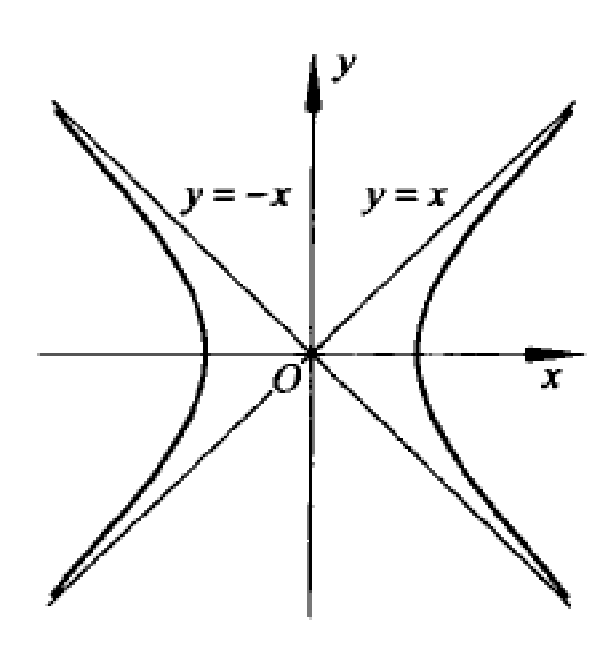


图 2.134

作出下列用极坐标$(\varphi,r)(r\geqslant 0)$表示的函数的图像：

【1546】 $r=a+b\cos\varphi\ (0<a\leqslant b)$.

解 当 $a=b$ 时，$r=a(1+\cos\varphi)$，这就是心脏线，如图2.135所示.

当 $0<a<b$ 时，其几何轨迹叫做蚶线，由于 $r(-\varphi)=r(\varphi)$，故图像关于极轴对称.

由于当 $r\geqslant 0$ 时，$|\varphi|\leqslant\alpha=\arccos\left(-\dfrac{a}{b}\right)$，故当 $\varphi=0$ 时 r 有极大值 $r=a+b$；当 $\varphi=\pm\alpha$ 时 r 有边界的极

小值 $r=0$. 又由于 $r'=-b\sin\varphi<0$，故当 φ 由 0 变到 α 时，r 由$a+b$变到 0.

当 $r<0$ 时，$\alpha<|\varphi|\leqslant\pi$，仿照上述讨论，$r$ 由 0 下降到 $a-b$.

极点 O 为二重点，如图 2.136 所示. 如果不考虑 $r<0$，则极点 O 不是二重点.

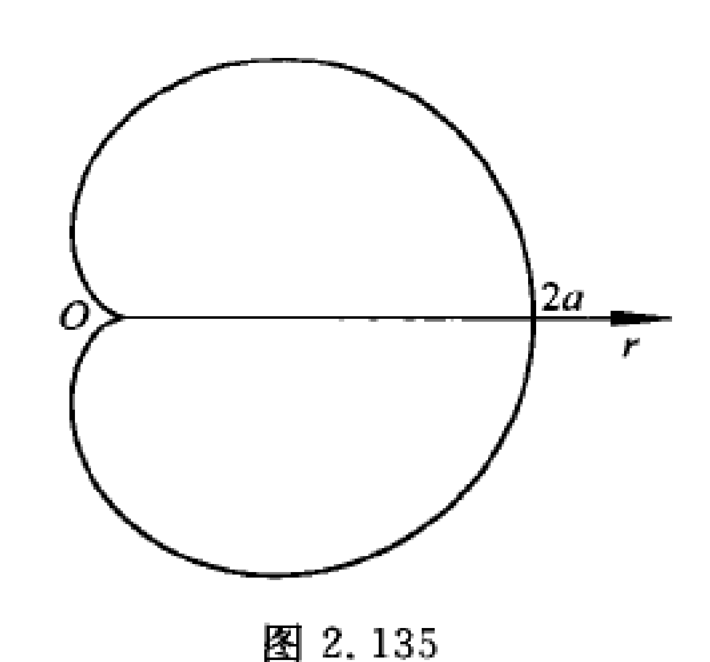


图 2.135

图 2.136

【1547】 $r=a\sin3\varphi\quad(a>0)$.

解 由于 $r\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=r(\varphi)$，故函数 r 是以$\frac{2\pi}{3}$为周期的函数. 函数的存在域为：

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3};\quad \frac{2\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad \frac{4\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{3}.$$

为此，只要讨论 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r'=3a\cos3\varphi\begin{cases}>0, & \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right),\\ <0, & \varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right),\end{cases}$$

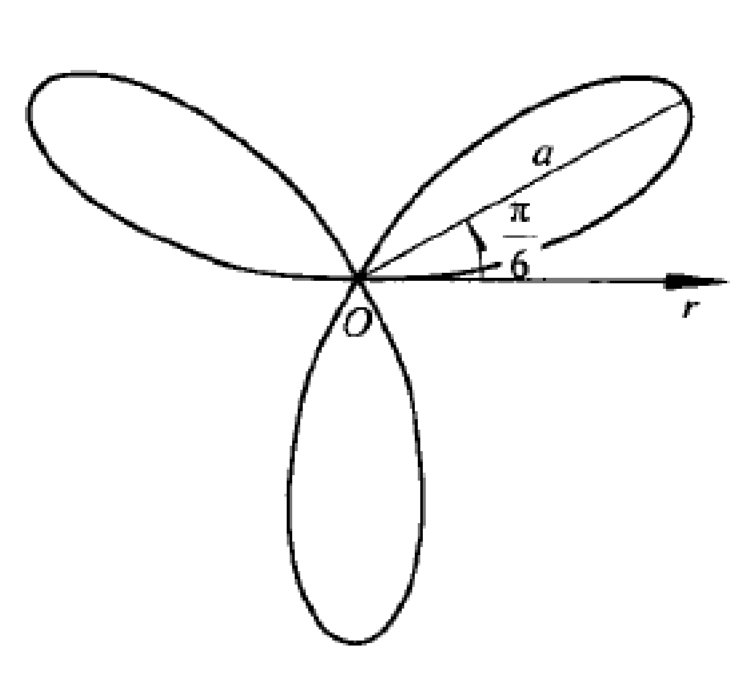


图 2.137

故当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$时 r 有极大值 $r=a$；当 $\varphi=0$ 及 $\frac{\pi}{3}$时，r 有极小值$r=0$. 射线 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\varphi=\frac{5\pi}{6}$及 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$为图像的三对称轴.

曲线在点 O 自交且为三重点，整个图像有三个形状相同的瓣. 如图 2.137 所示.

【1548】 $r=\frac{a}{\sqrt{\cos3\varphi}}\quad(a>0)$.

解 由于 $r\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=r(\varphi)$，故函数 r 是以$\frac{2\pi}{3}$为周期的函数. 显然图像关于极轴对称.

函数的存在域为：$|\varphi|<\frac{\pi}{6}$ 及 $\frac{\pi}{2}<|\varphi|<\frac{5\pi}{6}$. 为此只要讨论$-\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$即可.

$$r'=\frac{3a\sin3\varphi}{2(\cos3\varphi)^{\frac{3}{2}}}\begin{cases}<0, & \varphi\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right),\\ >0, & \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right),\end{cases}$$

故当 $\varphi=0$ 时有极小值 $r=a$. 当 φ 由 0 单调地增大到$\frac{\pi}{6}$时，r 由 a 单调地增大到$+\infty$，在这种意义上，$\varphi=\frac{\pi}{6}$为曲线的渐近线. 同样地 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$也为渐近线.

由周期性可知，当 $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$时有极小值 $r=a$. $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$及 $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$均为曲线的渐近线.

最后，还要研究在点$(a,0)$附近的状态. 为此，只要考虑在该点切线的斜率：

$$\tan\alpha=\frac{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

再以$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\dfrac{3a\sin3\varphi}{2(\cos3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$代入上式，即得

$$\tan\alpha=\frac{3a\sin3\varphi\sin\varphi+2a\cos\varphi\cos3\varphi}{3a\sin3\varphi\cos\varphi-2a\sin\varphi\cos3\varphi}.$$

于是，$\tan\alpha\Big|_{\varphi=0}=\infty$，即在$(a,0)$点曲线的切线垂直于极轴.

如图 2.138 所示.



图 2.138

【1549】 $r=a\dfrac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}$，其中 $\varphi>1\quad(a>0)$.

解 由于

$$\lim_{\varphi\to1}r=\lim_{\varphi\to1}\frac{a\,\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}=+\infty,\quad\lim_{\varphi\to+\infty}r=\lim_{\varphi\to+\infty}\frac{a\,\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}=\lim_{\varphi\to+\infty}\frac{a}{\mathrm{ch}^2\varphi}=0,$$

从而，曲线以 $\varphi=1$ 为渐近线，以极点为渐近点. 又

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=a\cdot\frac{\frac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi}(\varphi-1)-\mathrm{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}=a\cdot\frac{\cdot(\varphi-1)-\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\mathrm{ch}^2\varphi},$$

当 $1<\varphi<+\infty$时恒有$(\varphi-1)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi<0$. 事实上，令 $y(\varphi)=(\varphi-1)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi$，则 $y(1)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}2<0$，而$y'(\varphi)=1-\mathrm{ch}2\varphi<0$，故有 $y(\varphi)\leqslant y(1)<0$. 这就证明了当 $1<\varphi<+\infty$时恒有$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}<0$，即当 φ 增大时 r 单调减小.

为考察当 $r\to+\infty$时曲线的变化趋势，令

$$y_1=x\tan1,\quad y_2=a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi.$$

由于

$$\begin{aligned}y_2-y_1&=a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi-x\tan1=a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi-a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\tan1\\&=a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\tan1=a\,\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\tan\varphi-\tan1}{\varphi-1},\end{aligned}$$

从而，

$$\lim_{\varphi\to1}(y_2-y_1)=\lim_{\varphi\to1}a\,\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\tan\varphi-\tan1}{\varphi-1}=\frac{a\,\mathrm{th}1}{\cos1}.$$

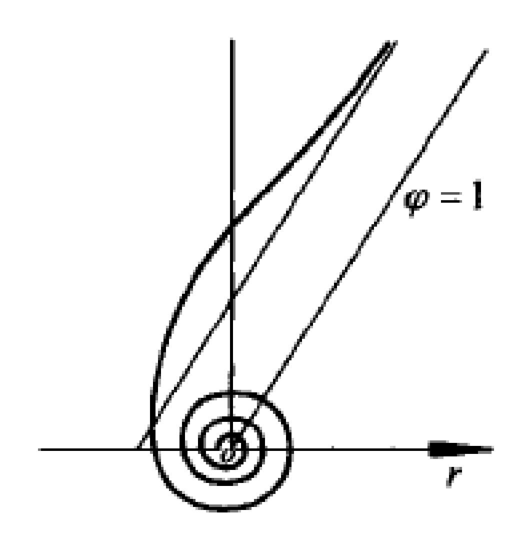


图 2.139

于是，在直角坐标系下，当 $r\to+\infty$时，曲线 $r=a\dfrac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi-1}$以直线 $y=x\tan1+a\dfrac{\mathrm{th}1}{\cos1}$为渐近线.

计算几点的坐标如下表：

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi\to+\infty$
r	4.15a	2.20a	1.59a	1.53a	1.17a	0.96a	0.65a	0.46a	0.24a	0.21a	0.18a	0.11a	$r\to0$

综上分析知，曲线是螺状线，如图 2.139 所示.

【1550】 $\cos\varphi=\dfrac{r-1}{r^2}$.

解 由方程容易判定，曲线关于极轴对称. 因而只需在 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 范围内研究图像. 方程可化为

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

由于必有 $1-4\cos\varphi\geqslant0$，故角的最小值应为 $\varphi=\arccos\dfrac{1}{4}\approx75°30'$，对应的 $r=2$. 由 $r>0$ 知曲线方程为

$$r=\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\qquad\left(\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right);\tag{1}$$

$$r=\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\qquad\left(\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi\right).\tag{2}$$

首先研究方程(1)所表示的曲线的图像. 因为随着 φ 增加, $2\cos\varphi$ 减小, $\sqrt{1-4\cos\varphi}$ 增大, 因而 r 随 φ 增加而单调增加. 事实上, 易证 $\frac{dr}{d\varphi}>0$. 又

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0} r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=+\infty,$$

所以, 当 $r\to+\infty$ 时有渐近线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$, 得 $x=\frac{r-1}{r}$, 故当 $r\to+\infty$ 时 $x\to1$, 即当 $r\to+\infty$ 时, 曲线与直线 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近(直角坐标系下 $x=1$ 为渐近线).

下面研究拐点. 由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr}=\frac{r^2-2r(r-1)}{r^4}=\frac{2-r}{r^3},\quad -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dr}=\frac{2-r}{r^3},\quad \frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^3}{r-2}\sin\varphi,$$

从而,

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\varphi^2}&=\frac{3r^2(r-2)-r^3}{(r-2)^2}\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi=\frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3}\sin^2\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi\\&=\frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3}\left[1-\frac{(r-1)^2}{r^4}\right]+\frac{r^3}{r-2}\cdot\frac{r-1}{r^2}\\&=\frac{r\{(2r-6)[r^4-(r-1)^2]+(r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}.\end{aligned}$$

由 $r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}=0$ 得 $2r^4-3r^2+8r-6=0$, 经判别知: 拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt5-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0} r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=1,$$

事实上, 由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$ 也可得: 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时, $r=1$. 因而点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 是曲线上的点. 又

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi}&=\frac{1}{(2\cos\varphi)^2}[(1-4\cos\varphi)^{-\frac12}(-2\sin\varphi)(2\cos\varphi)+2\sin\varphi(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})]\\&=\frac{2\sin\varphi[(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi}-2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}=\frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}.\end{aligned}\tag{3}$$

容易证明: $f(\varphi)=\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)<0$. 事实上, 有

$$f'(\varphi)=2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}}-1\right)<0\quad 且\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

又因当 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, (3)的其它因子均为正, 故得 $\frac{dr}{d\varphi}<0$, 即 r 随 φ 的增加而单调下降, 并且当 $\varphi=\pi$ 时达到极小值

$$r=\frac{1-\sqrt5}{-2}=\frac{\sqrt5-1}{2}.$$

事实上, $\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi=\pi$ 从负变到正.

计算几点的坐标列表如下:

φ	75°30′	76°5′	77°10′	81°	84°	87°	$\varphi\to\frac{\pi}{2}-0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r\to+\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示.

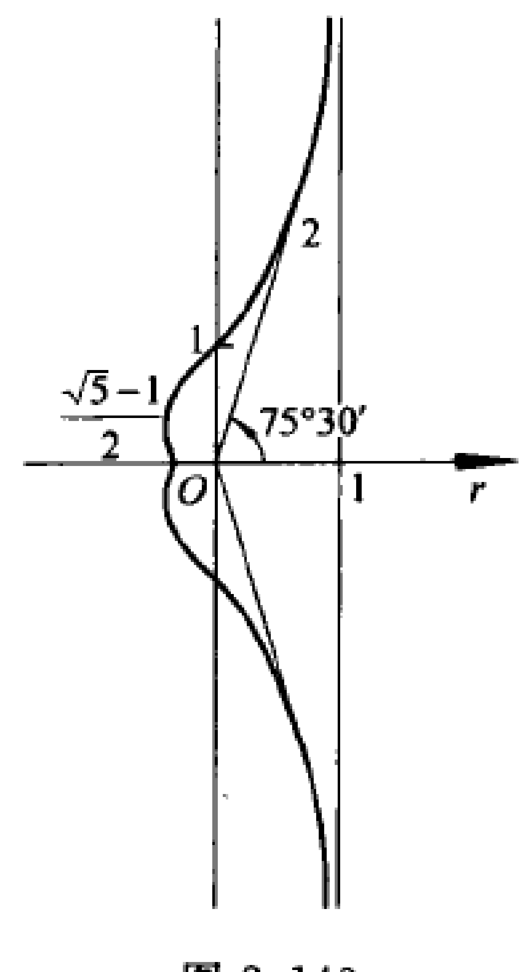


图 2.140

作出下列曲线族的图像(a 表参变量)：

【1551】 $y=x^2-2x+a$.

提示 将方程变形后作平移，并就 $a>1$，$a=1$ 及 $a<1$ 讨论抛物线顶点的位置.

解 将方程变形：$y-(a-1)=(x-1)^2$. 作平移

$$\begin{cases}x=x'+1\\y=y'+(a-1),\end{cases}$$

即得标准方程 $y'=x'^2$，此为呈凹状的抛物线.

当 $a>1$ 时，抛物线的顶点位于第一象限；当 $a<1$ 时，抛物线的顶点位于第四象限；当 $a=1$ 时，抛物线的顶点在(1,0). 不论 a 为何值，此抛物线的顶点位于直线 $x=1$ 上. 如图 2.141 所示.

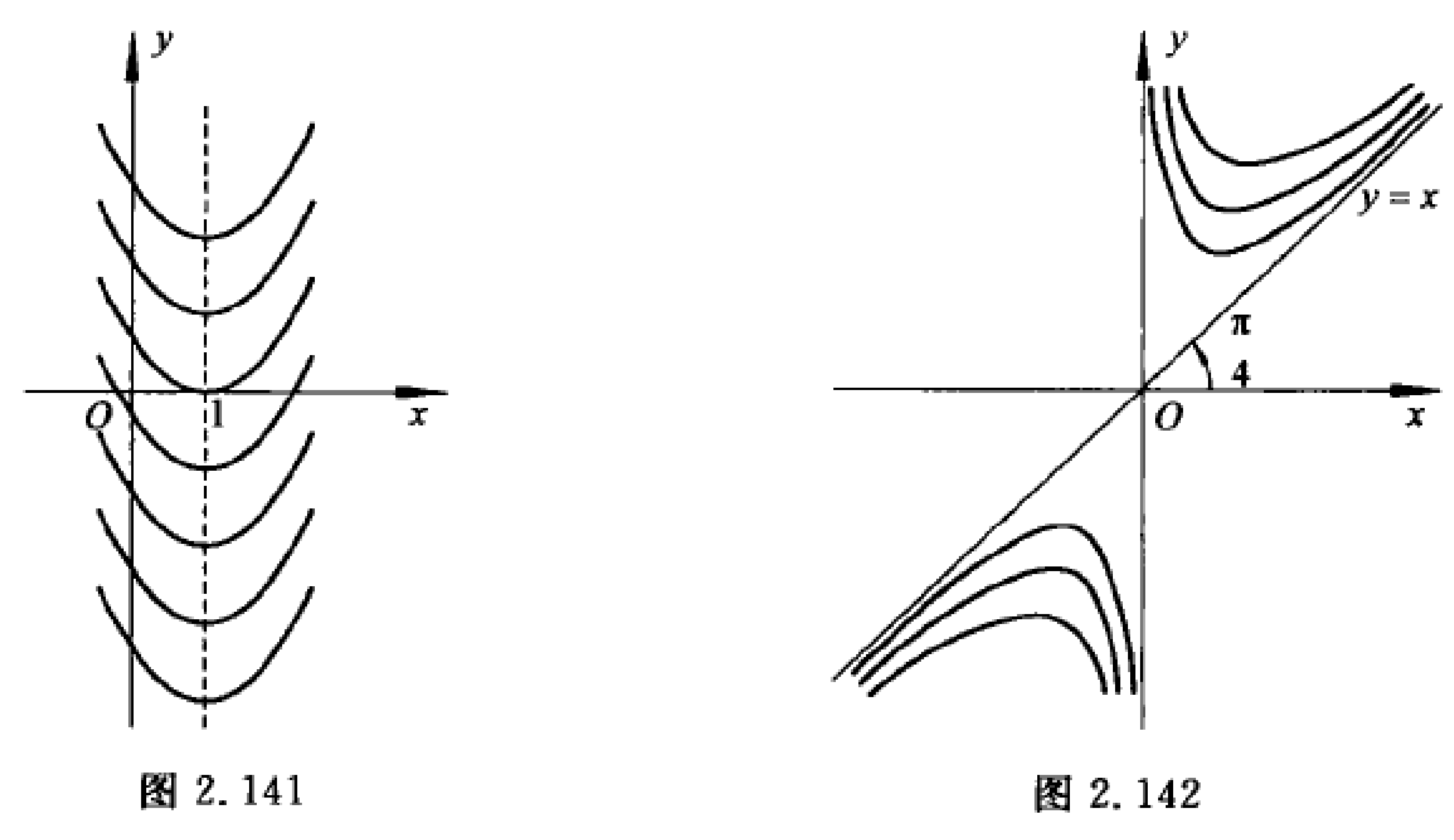


图 2.141　　图 2.142

【1552】 $y=x+\frac{a^2}{x}$.

解 当 $a=0$ 时为直线 $y=x$.

当 $a\neq0$ 时为双曲线族，其图像可由 $y=x$ 和 $y=\frac{a^2}{x}$ 相加而成，它们均以直线 $y=x$ 和 $x=0$ 为渐近线.

当 $x=|a|$ 时，有极小值 $y=2|a|$；当 $x=-|a|$ $(a\neq0)$时，有极大值 $y=-2|a|$.
如图 2.142 所示.

【1553】 $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y-x=\pm\sqrt{a(1-x^2)}$，即$(y-x)^2+ax^2=a$.

作仿射变换$\begin{cases}\xi_1=-x+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$ 则原方程变形为 $\xi_1^2+a\xi_2^2=a$.

当 $0<a<+\infty$ 时为椭圆族；当 $-\infty<a<0$ 时为双曲线族；当 $a=0$ 时为直线 $y=x$. 全族曲线均通过点 $(-1,-1)$ 及 $(1,1)$.

$y'=1\mp\dfrac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}$，令 $y'=0$，得 $x^2=\dfrac{1}{1+a}$，则 $1+a>0$ 或 $a>-1$.

$y''=\mp\dfrac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}}$，当 $y\geqslant x$ 时上式取负号；当 $y\leqslant x$ 时上式取正号. 于是，当 $y\geqslant x$ 时，有

(1)若 $a>0$，则当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时，由于 $y''<0$，故取得极大值 $y=\sqrt{1+a}$.

若 $-1<a<0$，则当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极大值 $y=-\sqrt{1+a}$. 当 $x=\mp1$ 时取得边界极小值 $y=\mp1$ $(a\neq0)$.

(2)由于 $y''<0$，故曲线是凸的. 当 $y\leqslant x$ 时，有

(3)若 $a>0$，当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值 $y=-\sqrt{1+a}$. 若 $-1<a<0$，当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值 $y=\sqrt{1+a}$. 当 $x=\mp1$ 时取得边界极大值 $y=\mp1$.

(4)由于 $y''>0$，故曲线是凹的. 此外，当 $a<0$ 时，曲线有渐近线，容易求得它们为 $y=(1\pm\sqrt{-a})x$. 椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉，故图略.

【1554】 $y=\dfrac{x}{2}+e^{-ax}$.

解 原方程可变形为 $y-\dfrac{x}{2}=e^{-ax}$. 因此，若作仿射变换 $\begin{cases}\xi_1=-\dfrac{x}{2}+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$ 则原方程化成标准形式 $\xi_1=e^{-a\xi_2}$

当 $a\neq0$ 时，表示一指数曲线族；当 $a=0$ 时，表示直线 $y=1+\dfrac{x}{2}$. 全族曲线均通过点 $(0,1)$.

$y'=\dfrac{1}{2}-ae^{-ax}$. 令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}\ln 2a$.

$y''=a^2e^{-ax}>0$，故曲线呈凹状. 若 $a>0$，则当 $x=\dfrac{1}{a}\ln 2a$ 时有极小值 $y=\dfrac{1}{2a}(1+\ln 2a)$；

若 $a\leqslant0$，则因 $y'>0$，故函数 y 是递增的.

现求渐近线：当 $a>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{xe^{ax}}\right)=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=0,$$

故渐近线为 $y=\dfrac{x}{2}$.

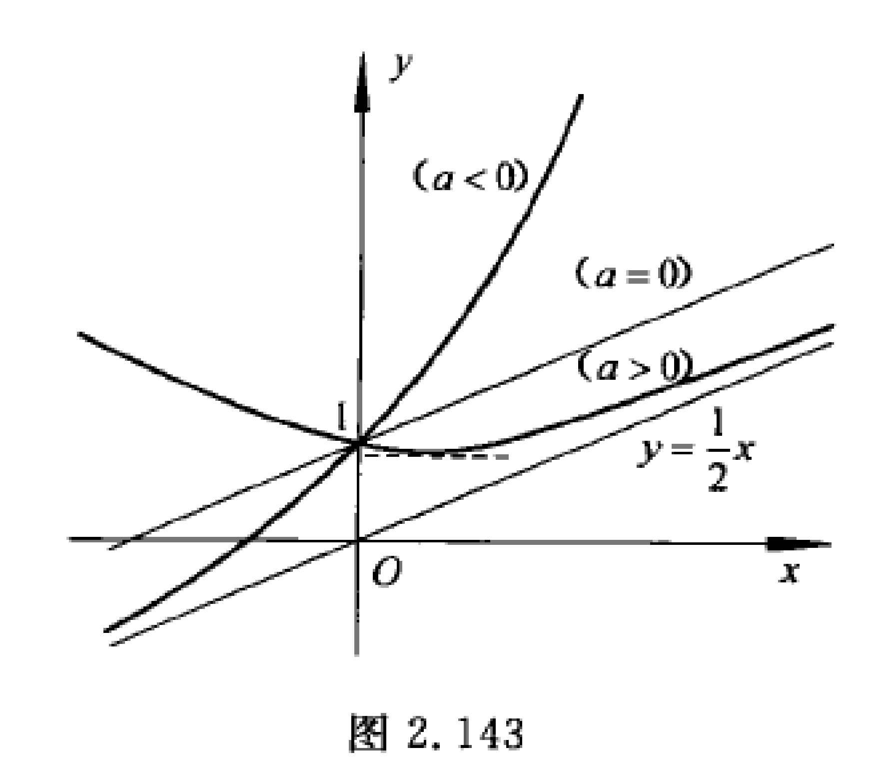


图 2.143

同法求得当 $a<0$ 时，渐近线也为 $y=\dfrac{x}{2}$，然此时应考虑 $x\to-\infty$. 如图 2.143 所示.

【1555】 $y=xe^{-\frac{x}{a}}$

解 全族曲线均通过原点.

$y'=e^{-\frac{x}{a}}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$. 令 $y'=0$，得 $x=a$.

$$y''=e^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a^2}-\frac{2}{a}\right).$$ 令 $y''=0$，得 $x=2a$.

经判别知：

若 $a>0$，当 $x=a$ 时有极大值 $y=ae^{-1}\approx0.37a$；

若 $a<0$，当 $x=a$ 时有极小值 $y=ae^{-1}$.

拐点 $x=2a$，$y=2ae^{-2}\approx0.27a$.

容易求得，渐近线为 $y=0$. 与 1554 题类似，当 $a>0$ 时应考虑 $x\to+\infty$；当 $a<0$ 时应考虑 $x\to-\infty$

又曲线族与直线 $y=x$ 在原点相切，如图 2.144 所示.

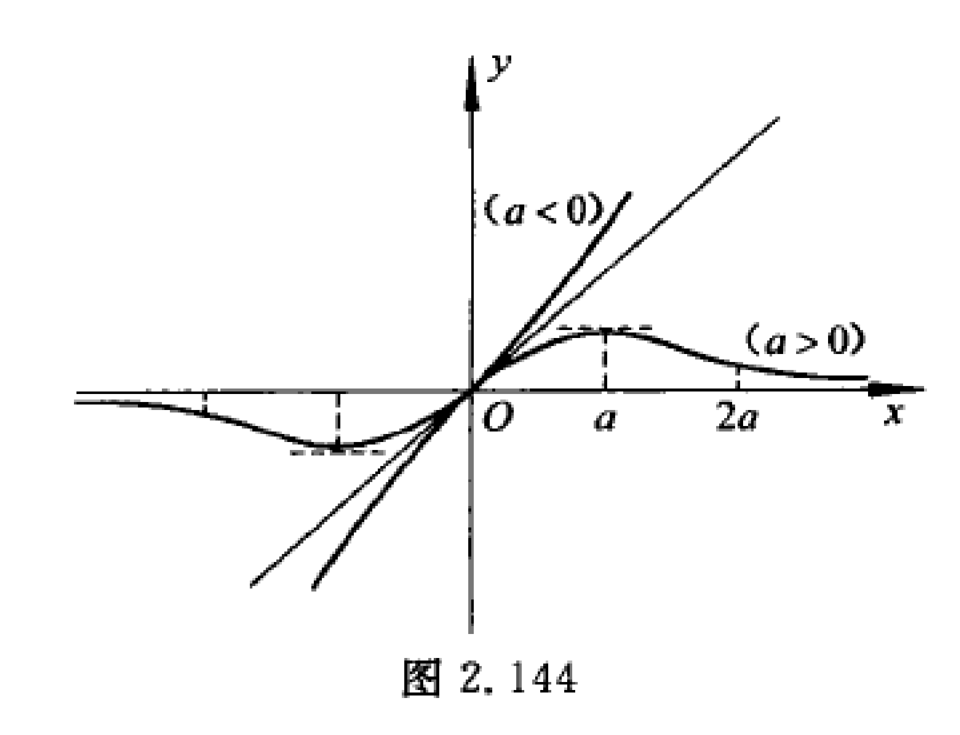


图 2.144

§13. 函数的极大值与极小值问题

【1556】 证明：若函数 $f(x)$ 不为负，则函数

$$F(x)=Cf^2(x)\quad(C>0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

证 如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点，则在 x_0 点附近有

$$F(x_0)>F(x)\quad(x\neq x_0)\tag{*}$$

即 $Cf^2(x_0)>Cf^2(x)$. 根据 $C>0$，以及 $f(x)$ 不为负，必有

$$f(x_0)>f(x)\quad(x\text{ 在 }x_0\text{ 附近，且 }x\neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点. 反之，若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则在 x_0 附近，有

$$f(x_0)>f(x)\quad(x\neq x_0).$$

于是，

$$Cf^2(x_0)>Cf^2(x),$$

即(*)式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理，若 x_0 为极小值点时，也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

【1557】 证明：若当 $-\infty<x<+\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 严格单调递增，则函数

$$f(x)\quad 与\quad \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点，例如是极大值点，则在 x_0 点附近有

$$f(x_0)>f(x)\quad(x\neq x_0).\tag{1}$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为严格单调递增的，故也有

$$\varphi(f(x_0))>\varphi(f(x))\quad(x\neq x_0).\tag{2}$$

这就证明了点 x_0 也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对，因为由(2)，从 $\varphi(x)$ 的严格单调递增性质知必有(1). 另一种情形，即设点 x_0 是极小值点时，也可类似获证. 于是，原命题得证.

【1558】 二正数的和等于常数 a,求此二正数的 m 次幂与 n 次幂($m>0,n>0$)之积的极大值.

提示 设一正数为 x,由题设,我们只要求函数 $f(x)=x^m(a-x)^n(0<x<a;m>0,n>0)$ 的极大值.

解 设一正数为 x,则按题设,我们只要求函数

$$f(x)=x^m(a-x)^n \quad (0<x<a)$$

的极大值. 由于 $f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$,故若令 $f'(x)=0$,即得 $x=\frac{ma}{m+n}$. 当 $0<x<\frac{ma}{m+n}$ 时,$f'(x)>0$;当 $\frac{ma}{m+n}<x<a$ 时,$f'(x)<0$. 因此,当 $x=\frac{ma}{m+n}$ 时,$f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

【1559】 二正数的乘积等于常数 a,求此二数的 m 次幂与 n 次幂($m>0,n>0$)之和的极小值.

解 设一正数为 x,则按题设,我们只要求函数

$$f(x)=x^m+\left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0<x<+\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x)=\frac{mx^{m+n}-na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然,在此点的左边,$f'(x)<0$,而在此点的右边,有 $f'(x)>0$,故知当 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时,函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}\right]=(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

【1560】 当对数之底取何值时存在这样的数,它本身和它的对数相等?

解 解法 1:

设所求之数为 a,则对于 $0<a<1$, $1<a<+\infty$ 及 $x>0$ 时

$$\log_a x=x \quad 或 \quad a^x=x. \tag{1}$$

问题即为取怎样的数 a,上式才成立.

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况,我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases} y=a^x, \\ y=x. \end{cases} \tag{2}$$

在交点处,方程(1)与(2)等价(图 2.145).

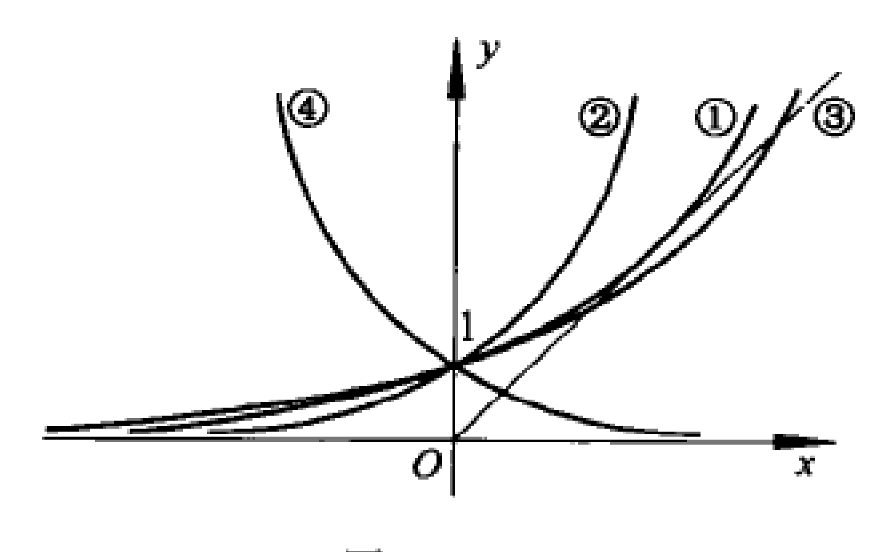


图 2.145

注意,指数曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 是否有公共点,就看其差

$$\Delta=f(x)=a^x-x$$

有无使 $\Delta=f(x)=0$ 的点 x.

设 $y=a_0^x$ 与 $y=x$ 相切于一点 $(x_0,a_0^{x_0})$,此时 $f'(x_0)=0$,即有

$$a_0^{x_0}\ln a_0-1=0. \tag{3}$$

从 $\Delta=0$ 知有(1)，即

$$a_0^{x_0}-x_0=0. \tag{4}$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0=e^{\frac{1}{e}},\quad x_0=e. \tag{5}$$

当 $a>a_0$ 时，易见 $y=a^x$ 比 $y=a_0^x$ 远离直线 $y=x$. 故此时无交点. 实际上，注意到有 $a_0^x\geqslant x$，并记 $g(a,x)=a^x$，对于 $x\geqslant 0$，只要 $a>a_0$ 就有 $a^x>a_0^x\geqslant x$，也即 $g(a_0,x)$是 $g(a,x)$的极小值. 故当 $a>a_0$ 时，$y=a$ 与 $y=x$ 无交点. 而当 $0<a\leqslant a_0$ 时(且要求 $a\neq 1$)，此时(2)有解，从而(1)有解. 如图 2.145 中曲线①、②、③、④所示.

解法 2：

设 $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$，则由 $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ 得 $x=e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$由正变负，故知 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$ 为极大值. 从而，$0<x^{\frac{1}{x}}\leqslant e^{\frac{1}{e}}$.

因此，当 $0<a\leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a\neq 1$ 时，有 $\log_a x=x$.

【1561】 从面积为给定值 S 的一切矩形中，求其周长为最小者.

解 设矩形的一边长为 x，则另一边长为 $\dfrac{S}{x}$，周长为

$$f(x)=2\left(x+\frac{S}{x}\right),$$

按题设，我们只要求其最小值.

由于 $f'(x)=2\left(1-\dfrac{S}{x^2}\right)$，故令 $f'(x)=0$，即得 $x=\sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S})>0$ 知，此时 $f(x)$有极小值. 又由于极值的唯一性，故此值也为最小值. 因此，所求的矩形为以$\sqrt{S}$为边的正方形.

【1562】 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求具有最大面积的直角三角形.

解 设一直角边为 x，则按题设，另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}$，故直角三角形的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}.$$

利用极值的解法得：当 $x=\dfrac{a}{3}$时，$S(x)$值为极大值. 又由于极值的唯一性，故知当 $x=\dfrac{a}{3}$时，$S(x)$取最大值. 此时斜边为$a-x=a-\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}a$，它为直角边的两倍，故此三角形的两锐角分别为 30°及 60°.

本题也可用 1556 题的结论求得结果. 事实上，令 $F(x)=4S^2(x)$，则 $F(x)$与 $S(x)$有相同的极值点，对 $F(x)$求极值可得同样的结果.

【1563】 要使容积为给定值 V 的圆柱形闭合容器有最小的表面积，其尺寸如何?

解 设容器的底半径为 x，则高为 $H=\dfrac{V}{\pi x^2}$，故圆柱体的表面积为

$$S(x)=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2.$$

由于

$$S'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2},$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 由 $S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)>0$ 知，当 $x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$时，$S(x)$有极小值

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值，故知当底半径为$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，而高为$\dfrac{V}{\pi x^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$时有最小表面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

【1564】 在不超过半圆的给定弓形内作出具有最大面积的内接矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA=\cos\varphi,\quad BC=\sin\alpha,\quad BA=\cos\alpha-\cos\varphi.$$

从而,矩形面积为

$$S(\alpha)=2BC\cdot BA=2\sin\alpha(\cos\alpha-\cos\varphi)=\sin2\alpha-2\sin\alpha\cos\varphi.$$

而

$$S'(\alpha)=2\cos2\alpha-2\cos\alpha\cos\varphi=4\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\varphi-2,$$

令 $S'(\alpha)=0$,可得

$$\cos\alpha=\frac{\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+8}}{4}.$$

图 2.146



注意到 $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,故 $\cos\varphi\leqslant\cos\alpha$. 于是,有

$$S''(\alpha)=-4\sin2\alpha+2\cos\varphi\sin\alpha\leqslant-4\sin2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha=-3\sin2\alpha<0.$$

这就说明

$$\alpha=\arccos\frac{\cos\varphi+\sqrt{\cos^2\varphi+8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点,也就是说此时弓形内所对应的内接矩形面积最大.

【1565】 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

中,作出具有最大面积而边平行于椭圆轴的内接矩形.

解 如图 2.147 所示.

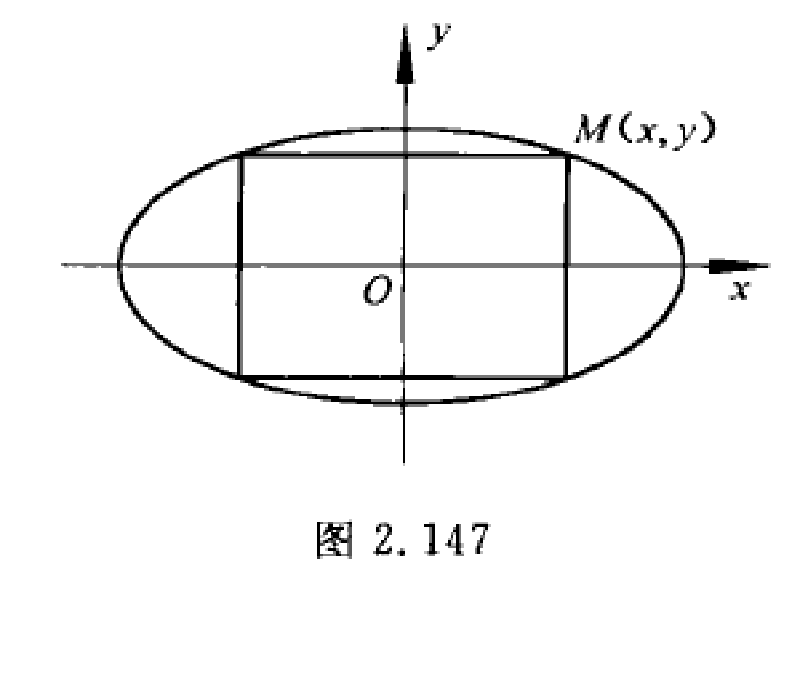
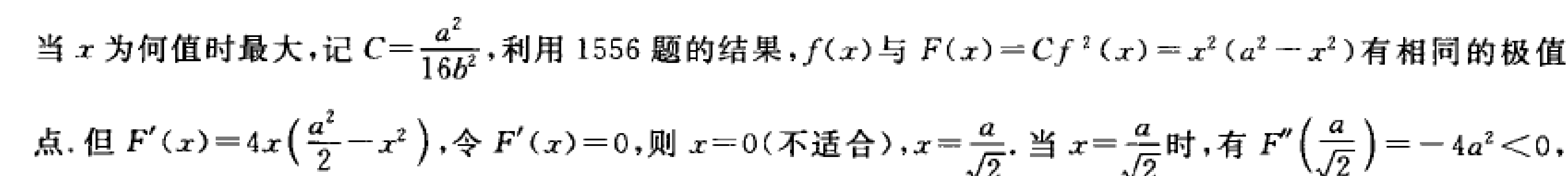


图 2.147

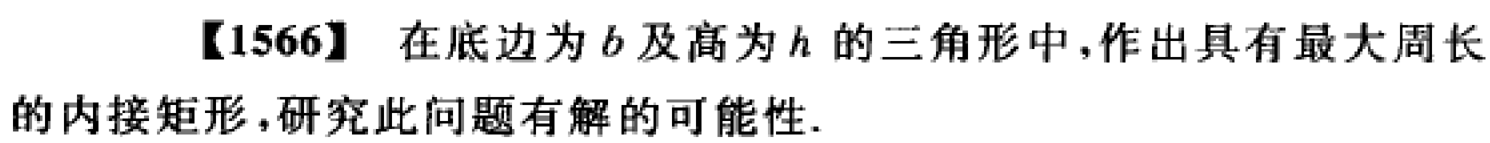
由于点 $M(x,y)$ 在椭圆上,故适合方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解之,得 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. 于是,按题设,求函数

$$f(x)=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



当 x 为何值时最大,记 $C=\frac{a^2}{16b^2}$,利用 1556 题的结果,$f(x)$ 与 $F(x)=Cf^2(x)=x^2(a^2-x^2)$ 有相同的极值点. 但 $F'(x)=4x\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)$,令 $F'(x)=0$,则 $x=0$(不适合),$x=\frac{a}{\sqrt2}$. 当 $x=\frac{a}{\sqrt2}$ 时,有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt2}\right)=-4a^2<0$,故 $f\left(\frac{a}{\sqrt2}\right)=2ab$ 为最大面积. 此时内接矩形的边为 $a\sqrt2$ 和 $b\sqrt2$.



【1566】 在底边为 b 及高为 h 的三角形中,作出具有最大周长的内接矩形,研究此问题有解的可能性.

解 如图 2.148 所示.

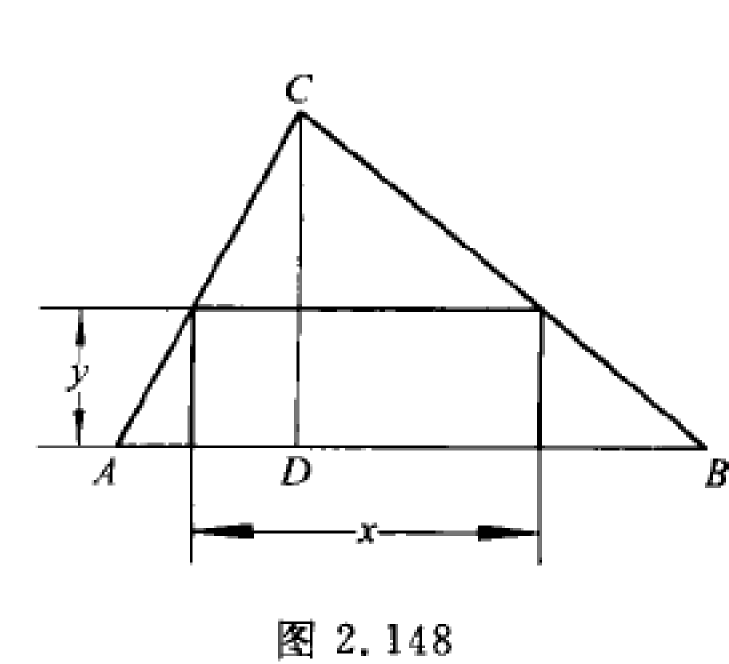


图 2.148

$AB=b$,$CD=h$. 由于 $\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}$,故 $x=\frac{b}{h}(h-y)$. 矩形的周长为

$$p=2\left[y+\frac{b}{h}(h-y)\right]=2\left[\left(1-\frac{b}{h}\right)y+b\right].$$

显见,当 $h=b$ 时,周长 $p=2b$ 为一定值;当 $h>b$ 时,$p'_y>0$,p 单调增加,故当 $y=h$ 时有边界的极大值 $p=2h$;当 $h<b$ 时,$p'_y<0$,p 单调减少,理论上当 $y=0$ 时有边界的极大值 $2b$. 但作出的内接矩形不允许边长为零,故当 $h<b$ 时作出的内接矩形有最大周长是不存在的,即此时问题无解.

【1567】 从直径为 d 的原木(圆柱横截面)切出横截面为矩形的梁,此矩形的底等于 b,高等于 h. 若梁

的强度与 bh^2 成正比，问梁的尺寸如何，其强度最大？

解 由于 $b^2+h^2=d^2$，故 $h^2=d^2-b^2$，按题设，我们只要考虑函数

$$f(b)=b(d^2-b^2)$$

何时取最大值.

由于 $f'(b)=d^2-3b^2$，令 $f'(b)=0$ 得 $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$. 此时 $h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$，$f''(b)=-6b<0$，$f(b)$的值最大. 因此，所求矩形的底为$\frac{d}{\sqrt{3}}$，高为 $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

【1568】 在半径为 R 的半球中作出具有最大体积且底为正方形的内接长方体.

解 设底边之一半为 x，则按题设，有

$$2x^2+y^2=R^2,$$

其中 y 为长方体高之一半. 解之，得 $y=\sqrt{R^2-2x^2}$. 由题设，我们只要考虑函数

$$f(x)=4x^2y=4x^2\sqrt{R^2-2x^2}$$

何时取最大值.

$$f'(x)=\frac{8x(R^2-3x^2)}{\sqrt{R^2-2x^2}},$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$，此时 $y=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 经判别可知，$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$值为最大. 因此，所求的长方体之底、宽、高分别为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}$，$\frac{2R}{\sqrt{3}}$，$\frac{R}{\sqrt{3}}$，而最大体积为

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}.$$

【1569】 在半径为 R 的球内作出具有最大体积的内接圆柱体.

提示 设圆柱体的底半径为 r，高为 $2h$，则有 $h=\sqrt{R^2-r^2}$. 由题设，我们只要考虑函数 $f(r)=2\pi r^2h=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$ 何时最大.

解 设圆柱体的底半径为 r，高为 $2h$，则有

$$r^2+h^2=R^2,$$

即 $h=\sqrt{R^2-r^2}$. 按题设，我们只要考虑函数

$$f(r)=2\pi r^2h=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$$

何时取最大值.

$f'(r)=\frac{2\pi r(2R^2-3r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$，此时 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$，且

$$f(r)=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知，此值即为圆柱体体积的最大值.

【1570】 在半径为 R 的球内作出具有最大表面积的内接圆柱体.

解 如图 2.149 所示，圆柱体的表面积为

$$S=2\pi(R\cos\varphi)^2+4\pi(R\cos\varphi)(R\sin\varphi)=\pi R^2(1+\cos2\varphi)+2\pi R^2\sin2\varphi.$$

由$\frac{dS}{d\varphi}=0$ 得 $\tan2\varphi=2$. 记其解为

$$\varphi_0=\frac{1}{2}\arctan2,\ \varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，$\sin2\varphi_0=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos2\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 又由于

$$\left.\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0}=-4\pi R^2\left[2\sin2\varphi+\cos2\varphi\right]_{\varphi=\varphi_0}$$

$$=-4\pi R^2\left[2\sin2\varphi_0+\frac{1}{2}\sin2\varphi_0\right]=-10\pi R^2\sin2\varphi_0<0,$$

故此时表面积最大，且最大表面积为

$$S=\pi R^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\pi R^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\pi R^2\,(1+\sqrt{5})\approx0.81\times4\pi R^2.$$

从而，球内接圆柱体的最大表面积约为球面面积的 81%.

图 2.149

【1571】 在已知球外作出具有最小体积的外切圆锥体.

解 设外切圆锥体的底半径为 x，高为 h，球的半径为 R，则可求得 $h=\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}$，于是，外切圆锥体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2\cdot\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}=\frac{2}{3}\pi R\cdot\frac{x^4}{x^2-R^2}\quad(x>0).$$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$，经判别可知，此时体积最小，且

$$V\Big|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以，外切圆锥体的最小体积是球体体积的二倍.

【1572】 求母线为给定值 l 的圆锥体之最大体积.

解 设圆锥体的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥体的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只要求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}\,l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知，$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,l\right)$ 最大，因此，所求的圆锥体的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\,l^3$.

【1573】 在顶角为 2α 底半径为 R 的直圆锥体中作出具有最大表面积的圆柱体.

解 设 r 及 h 为圆柱体的底半径与高，H 为圆锥体的高（如图2.150）. 按题设，只要求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于

$$\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD},\quad 即\quad \frac{h}{H}=\frac{R-r}{R},\quad 故\quad h=\frac{R-r}{R}H,$$

其中 $H=R\cot\alpha$ 是已知常数. 于是，

$$S=f(r)=2\pi\left[r^2+rH\left(1-\frac{r}{R}\right)\right]\quad(0\leqslant r\leqslant R),$$

$$f'(r)=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right).$$

令 $f'(x)=0$，得 $r=\frac{HR}{2(H-R)}$，此值应在 0 与 R 之间，即 $H>R$ 与 $\frac{R}{H}=\tan\alpha<\frac{1}{2}$. 经判别可知，此时 $f(r)$ 为最大，因此，所求的圆柱体

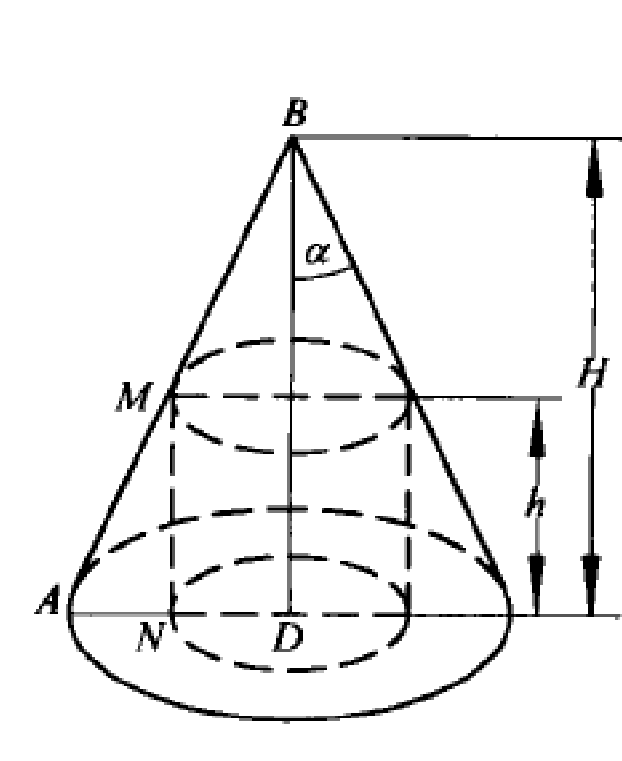


图 2.150

当 $\tan\alpha<\frac{1}{2}$ 及 $r=\frac{R}{2(1-\tan\alpha)}$ 时达到最大值. 当 $\tan\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 即 $H\leqslant 2R$ 时，由于 $f'(r)=\frac{2\pi}{R}[(2R-H)r+H(R-r)]$ 大于零. 因此，当 $r=R$ 时，达到边界的极大值，但是，当 $r=R$ 时，显然有 $h=0$，于是，得到的解可以考虑作为一个扁平的圆柱体，它的两底都与已知圆锥的底重合，而全表面积为 $2\pi R^2$.

【1574】 求从点 $M(p,p)$ 到抛物线 $y^2=2px$ 的最短距离.

解 按题设，只要求函数

$$f(y)=(x-p)^2+(y-p)^2=x^2+2p^2-2py=\frac{y^4}{4p^2}+2p^2-2py$$

的极小值.

由于 $f'(y)=\frac{y^3-2p^3}{p^2}$. 令 $f'(y)=0$ 得 $y=\sqrt[3]{2}p$，此时 $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}p$. 经判别可知，$f(\sqrt[3]{2}p)$ 为最小. 因此，所求的最短距离为

$$\sqrt{f(\sqrt[3]{2})}=p\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-1\right)^2+(\sqrt[3]{2}-1)^2}=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{4}-2}{2(\sqrt[3]{2}-1)}\right]^2+1}=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}.$$

【1575】 求从点 $A(2,0)$ 到圆 $x^2+y^2=1$ 的最短与最长距离.

解 显见，最短距离为 1，最长距离为 3，事实上，用微分法也可解之，只要求函数

$$(x-2)^2+y^2=5-4x=f(x)$$

的极值.

由于 $f'(x)=-4<0$，故 $f(x)$ 递减，因此，当 $x=-1$ 时，有最大值 $\sqrt{f(-1)}=3$；而当 $x=1$ 时有最小值 $\sqrt{f(1)}=1$.

【1576】 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ 的经过顶点 $(0,-b)$ 的最大弦.

解 按题设，我们只要求函数

$$\begin{aligned}x^2+(y+b)^2&=x^2+y^2+2by+b^2=\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+y^2+2by+b^2\\&=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2+2by+(a^2+b^2)=f(y)\end{aligned}$$

的最大值. 为此，先求得 $f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b$. 令 $f'(y)=0$，得 $y=\frac{b^3}{a^2-b^2}=\frac{b^3}{c^2}$ $(c=\sqrt{a^2-b^2})$，此时

$$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^6}{c^4}=a^2\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right),$$

或

$$x=\pm\frac{a}{c^2}\sqrt{c^4-b^4}=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}\quad\left(b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

经判别可知，此时弦长为最大值，且其值为

$$\sqrt{a^2\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right)+\left(\frac{b^3}{c^2}+b\right)^2}=\frac{a^2}{c}.$$

此即最大弦长. 弦的一端点为 $(0,-b)$，另一端点为 $\left(\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}\cdot\frac{b^3}{c^2}\right)$，但仅当 $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时，$\sqrt{a^2-2b^2}$ 才有意义.

若 $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$，则由于

$$f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)+2b>2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)(-b)+2b=\frac{2a^2}{b}>0,$$

故当 $y=b,x=0$ 时，取得弦长的边界最大值，此时最大弦长为 $2b$.

【1577】 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 $M(x,y)$ 引切线，使由此切线与坐标轴构成的三角形具有最小的面积.

解 切线斜率为 $k=-\frac{b^2x}{a^2y}$，于是，切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x).$$

不失一般性，可设点 M 在第一象限. 它在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}$ 和 $\frac{b^2}{y}$. 因此，所求三角形的面积为

$$\frac{a^2b^2}{2xy}=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

按题设，我们只要求函数

$$f(x)=x^2(a^2-x^2)$$

的最大值. 为此，先求得

$$f'(x)=2a^2x-4x^3.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$，此时 $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$，经判别可知，$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为最大值. 因此，所求的点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$，三角形面积的最小值为 ab.

【1578】 直径相同的圆柱体与半球体拼接在一起构成一物体，其体积为给定值 V. 要使此物体具有最小的表面积，其尺寸如何？

解 设 r 为圆柱体的底半径，h 为其高，则按题设，我们有

$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2h \quad 或 \quad h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x)=3\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

$$S'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{2V}{r^2},$$

令 $S'(r)=0$，得 $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$，此时 $h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知，$S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值. 因此，当 $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小.

【1579】 若明渠的横截面为等腰梯形，渠中流水的横截面面积为 S，水面的高为 h，问水渠侧边的倾角 φ 如何，才使其横截面边界被水浸湿的部分具有最小的长度？

解 浸湿长 $l=a+2h\csc\varphi$，其中 a 为底边长，而截面面积为

$$S=\frac{1}{2}(2a+2h\cot\varphi)h=ah+h^2\cot\varphi.$$

于是，被水浸湿部分的长度为 $\qquad l=2h\csc\varphi+\frac{S}{h}-h\cot\varphi.$

由 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{h}{\sin^2\varphi}=0$，得 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi=60°$. 因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=60°}=\left.\frac{2h\sin^3\varphi-h\sin2\varphi(1-2\cos\varphi)}{\sin^4\varphi}\right|_{\varphi=60°}>0,$$

所以，当 $\varphi=60°$ 时，横截面被水浸湿的部分具有最小的长度.

【1580】 设封闭曲线所围面积为 S，则该曲线的周长与面积同为 S 的圆的周长之比称为封闭曲线的**“弯曲度”**.

设等腰梯形 $ABCD(AD/\!/BC)$ 的底边 $AD=2a$，锐角 $BAD=\alpha$，问等腰梯形的形状如何，才有最小的弯曲度？

解 设腰 $AB=CD=b$，则梯形的周长为

$$l=4a+2b(1-\cos\alpha),$$

梯形的面积为

$$S=(2a-b\cos\alpha)b\sin\alpha.$$

令 $S=\pi R^2$ 得

$$R=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{(2a-b\cos\alpha)b\sin\alpha},$$

相应的圆周长为

$$L=2\pi R=2\sqrt{\pi(2a-b\cos\alpha)b\sin\alpha}.$$

令弯曲度为 K,则

$$K=\frac{l}{L}=\frac{2a+b(1-\cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a-b\cos\alpha)b\sin\alpha}}.$$

由 $\frac{dK}{db}=0$,得 $b=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. 可以验证,当 $AB=CD=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$ 时,具有最小的弯曲度,此时,梯形恰好外切于某圆.

【1581】 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形,才能使余下的部分可卷成一漏斗,其容积为最大?

解 设余下部分的中心角为 x,则漏斗(呈圆锥形)底的周长为 Rx,底半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$(R 为原圆的半径),其高为

$$h=\sqrt{R^2-\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2},$$

其容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

按题设,我们只要求 x 为何值时,函数 $f(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$ 的值最大. 为此,先求得

$$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5.$$

令 $f'(x)=0$,要注意不允许 $x=0$,得 $x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 经判别可知,$f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此,所切去的扇形的中心角应为

$$2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

【1582】 从南至北的铁路经过 B 城,某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a km,距偏北面之 B 城所在纬线的距离为 $b$km. 为了从 A 到 B 运输货物最经济,从工厂修建一条专线铁路,若每吨货物沿专线铁路运输的价格是 p 元/km,而沿常规铁路为 q 元/km($p>q$),则专线应向常规铁路取怎样的角度 φ?

解 如图 2.151 所示,所需运费为

$$M=(b-a\cot\varphi)q+\sqrt{a^2+a^2\cot^2\varphi}\,p=qb-aq\cot\varphi+pa\csc\varphi.$$

由 $\frac{dM}{d\varphi}=\frac{aq}{\sin^2\varphi}-\frac{ap\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0$,得 $\varphi_0=\arccos\frac{q}{p}$. 又

$$\left.\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0}=ap\frac{1}{\sin\varphi_0}>0,$$

故当 $\arccos\frac{q}{p}\geqslant\arctan\frac{a}{b}$ 时,$\varphi_0=\arccos\frac{q}{p}$,相应运费最省;

当 $\arccos\frac{q}{p}<\arctan\frac{a}{b}$ 时,$\varphi_0=\arctan\frac{a}{b}$,运费最省.

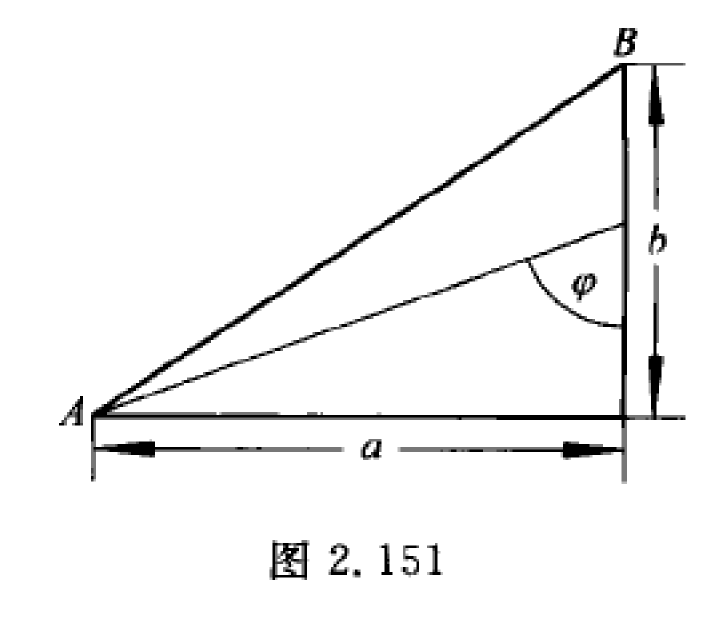


图 2.151

【1583】 两船各以恒定的速度 u 和 v 沿直线前进,二者前进方向所成的角为 θ. 若在某时刻它们到其路线交点之距离分别为 a 和 b,求二船的最小距离.

解 设两船与路线交点的距离分别为 a,b 时的时刻 $t_0=0$,则时刻为 t 时两船的距离 s 适合下式:

$$s^2=(a+ut)^2+(b+vt)^2-2(a+ut)(b+vt)\cos\theta.$$

由 $2s\frac{ds}{dt}=2(a+ut)u+2(b+vt)v-2(bu+2uvt+av)\cos\theta=0$,解得

$$t_1=-\frac{au+bv-(av+bu)\cos\theta}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.$$

于是，相应地有

$$\begin{aligned}s^2&=(a^2+b^2-2ab\cos\theta)+2[(au+bv)-(av+bu)\cos\theta]t_1+(u^2+v^2-2uv\cos\theta)t_1^2\\&=\frac{1}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}\{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)(u^2+v^2-2uv\cos\theta)-2[(au+bv)-(av+bu)\cos\theta]^2\\&\quad+[(au+bv)-(av+bu)\cos\theta]^2\}\\&=\frac{[(av-bu)\sin\theta]^2}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.\end{aligned}$$

经判别可知，此时 s 最小：

$$s=\frac{|av-bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}.$$

又两船的最小距离也可在 $t_0=0$ 之前达到.类似地，可求得最小距离为 $s=\dfrac{|av+bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$.

总之，两船间的最小距离为

$$s=\frac{|av\mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}.$$

【1584】 在 A 与 B 二点处各有一光源，其发光强度分别为 S_1 与 S_2.在线段 $AB=a$ 上求出最小照度的点 M.

解 设 $AM=x$，则照度

$$I=\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{(a-x)^2}.$$

由 $\dfrac{dI}{dx}=-\dfrac{2S_1}{x^3}+\dfrac{2S_2}{(a-x)^3}=0$ 得 $S_2x^3=S_1(a-x)^3$.解之，得

$$x=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}.$$

经判别可知，此时照度最小.

【1585】 发光点位于半径为 R 与 $r(R>r)$ 的二互不相交之球的连心线上，并在此二球的外面，此发光点的位置如何，才可使二球表面上被照明部分之和为最大？

解 设发光点离大球中心之距离为 x，两球中心之距离为 a，则按球冠面积公式推知被照明部分面积之和为

$$S=2\pi R\left(R-\frac{R^2}{x}\right)+2\pi r\left(r-\frac{r^2}{a-x}\right),$$

式中 x 应满足 $R<x\leqslant a-r$.由

$$\frac{dS}{dx}=2\pi R^3\cdot\frac{1}{x^2}-2\pi r^3\cdot\frac{1}{(a-x)^2}=0,$$

得

$$x=\frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

又由 $x\leqslant a-r$ 可得

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{3}{2}}}a\leqslant a-r,\quad 即\quad a\geqslant r+R\sqrt{\frac{R}{r}},$$

经判别可知，此时被照明面积最大.

当 $R+r<a<r+R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ 时，显然有 $x=a-r$，经判别可知，此时被照明面积也为最大.

【1586】 设圆桌面的半径为 a，应当在正对桌面中央多高的地方安置电灯，才可使桌面边缘的照度为最大？

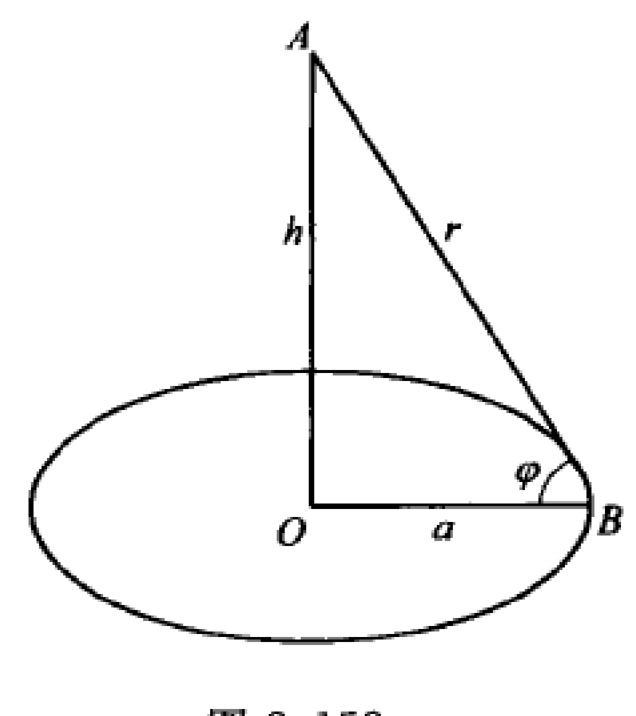


图 2.152

解 如图 2.152 所示. 由物理学知，照度 I 为

$$I=I_0\frac{\sin\varphi}{r^2}=I_0\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}\quad (I_0\text{ 为光源的发光强度，它是常数}).$$

考虑函数 $f(r)=\frac{r^2-a^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}-\frac{a^2}{r^6}$ 何时最大，$f'(r)=-\frac{4}{r^5}+\frac{6a^2}{r^7}=\frac{6a^2-4r^2}{r^7}$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判别可知，$f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$最大. 因此，我们应在高 $h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯，才可使桌面边缘上的照度为最大.

【1587】 向宽为 a 的河修建一宽为 b 的运河，二者成直角相交，问能驶进这运河的船，其最大的长度如何？

解 如图 2.153 所示. BC 的长度为

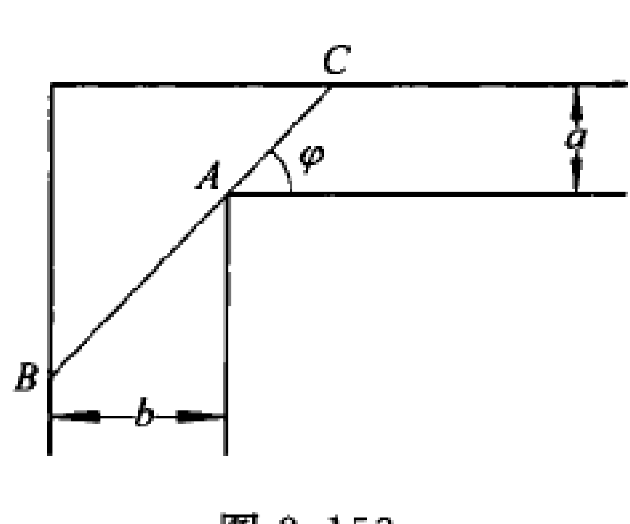


图 2.153

$l=a\csc\varphi+b\sec\varphi$. $\quad l'=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$,

令 $l'=0$ 得 $\tan\varphi_0=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 或 $\cot\varphi_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$，从而有

$$\csc\varphi_0=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\quad \sec\varphi_0=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l''\Big|_{\varphi=\varphi_0}=3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0}+\frac{a}{\sin\varphi_0}\right)>0,$$

因此，$l\Big|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值，即船的最大长度为 $l\Big|_{\varphi=\varphi_0}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

【1588】 船航行一昼夜的耗费由两部分组成：固定部分等于 a 元，变动部分与速度的立方成正比增加. 在怎样的速度 v 时，船航行最为经济？

解 设航行的全路程为 s，速度为 v，则总耗费为

$$Q=(a+kv^3)\frac{s}{v}=\frac{as}{v}+skv^2.$$

由 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}v}=0$ 得 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 经判别可知，此时船航行最经济.

【1589】 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上，需用力把物体从原位置移动. 若物体摩擦因子等于 k，问作用力对水平面的倾斜程度如何，才使所需的力为最小？

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α，则

$$F\cos\alpha=k(P-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{kP}{\cos\alpha+k\sin\alpha}.$$

令 $y=\cos\alpha+k\sin\alpha$，为使 F 最小，只要使 y 最大. 由

$y'_\alpha=-\sin\alpha+k\cos\alpha=0$ 得 $\alpha_0=\arctan k$. 此时

$y''_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-k\sin\alpha_0=-\sqrt{1+k^2}<0$. 即当 $\alpha_0=\arctan k$时，y 为最大值，从而 F 为最小值，也即此时用力最省.

【1590】 有一茶杯，其形状为半径为 a 的半球，在茶杯中放一长为 $l>2a$ 的杆，求杆的平衡位置.

解 取球心为坐标原点. 当 $2a<l\leqslant 4a$ 时，设杆的质心的纵坐标为 y，杆对杯口所在平面的倾角为 φ，则

$$y=-\left(2a\cos\varphi-\frac{l}{2}\right)\sin\varphi \quad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

当杆平衡时，y 最小，为此，求 y 的极值. 由 $y'_\varphi=-4a\cos^2\varphi+\frac{l}{2}\cos\varphi+2a=0$ 得

$$\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a} \quad \text{（负值不合适，舍去）}.$$

经判别可知，此时 y 取最小值，即当 $\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 时，棒取平衡位置.

当 $l>4a$ 时，杆的质心必在半球心外，于是，此时杆失去平衡，无平衡位置.

§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1° **n 阶相切** 对于两曲线 $y=\varphi(x)$ 及 $y=\psi(x)$，若在点 x_0 有

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0) \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

且
$$\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线在此点 n 阶相切（在严格的意义上讲!），当 $x\to x_0$ 时有：

$$\varphi(x)-\psi(x)=O^*((x-x_0)^{n+1}).$$

2° **曲率圆** 若圆周

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

与已知曲线 $y=f(x)$ 二阶或更高阶相切，则称此圆为在相应点的曲率圆. 这个圆的半径

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径，而量 $k=\frac{1}{R}$ 称为曲率.

3° **渐屈线** 曲率圆中心 (ξ,η)（曲率中心）

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线.

【1591】 选择直线

$$y=kx+b$$

的参数 k 与 b，使它与曲线

$$y=x^3-3x^2+2$$

二阶或更高阶相切.

解 要二阶或更高阶相切，必需使 $y''=6x-6=0$，即要 $x=1$；同时在 $x=1$ 时，两个一阶导数也应相等，即 $k=3\cdot1^2-6\cdot1=-3$.

当 $x=1$ 时，代入方程 $x^3-3x^2+2-y=0$，得 $y=0$. 由于直线 $y=kx+b$ 也需通过点 $(1,0)$，故有

$$0=-3\cdot1+b, \quad \text{即} \quad b=3.$$

因此，所求的直线为

$$y=3(1-x),$$

参数 $k=-3$, $b=3$.

【1592】 应当怎样选择参数 a, b 和 c，才能使抛物线

$$y=ax^2+bx+c$$

在点 $x=x_0$ 与曲线 $y=e^x$ 二阶相切?

提示 由两曲线在点 $x=x_0$ 处 n 阶相切的定义，应有 $ax_0^2+bx_0+c=e^{x_0}$, $2ax_0+b=e^{x_0}$ 及 $2a=e^{x_0}$.

解 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，在点 $x=x_0$ 有

$$y'\Big|_{x=x_0}=2ax_0+b,\quad y''\Big|_{x=x_0}=2a,\quad y'''=0.$$

按假设，应有

$$\begin{cases}ax_0^2+bx_0+c=e^{x_0},\\ 2ax_0+b=e^{x_0},\\ 2a=e^{x_0},\end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{1}{2}e^{x_0},\quad b=e^{x_0}(1-x_0),\quad c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

【1593】 下列曲线与 Ox 轴在点 $x=0$ 相切的阶如何：

(1) $y=1-\cos x$； (2) $y=\tan x-\sin x$； (3) $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

解 (1) $y'=\sin x$，$y''=\cos x$，于是，

$$y'\Big|_{x=0}=0,\quad y''\Big|_{x=0}=1.$$

而对于 Ox 轴 $y=0$，始终有 $y'=0$，$y''=0$. 因此，曲线 $y=1-\cos x$ 与 Ox 轴有一阶相切.

(2) $y'=\sec^2x-\cos x$， $y''=2\sec^2x\tan x+\sin x$， $y'''=4\sec^2x\tan^2x+2\sec^4x+\cos x$，

于是，$y'\Big|_{x=0}=y''\Big|_{x=0}=0$，$y'''\Big|_{x=0}=3\neq0$. 因此，曲线 $y=\tan x-\sin x$ 与 Ox 轴有二阶相切.

(3) $y'=e^x-1-x$，$y''=e^x-1$，$y'''=e^x$，于是，

$$y'\Big|_{x=0}=y''\Big|_{x=0}=0,\quad y'''\Big|_{x=0}=1\neq0.$$

因此，曲线 $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有二阶相切.

【1594】 证明：曲线

$$y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

提示 利用 1225 题的结果.

解 由 1225 题的结果知，对于任意正整数 n，有

$$y^{(n)}\Big|_{x=0}=0,$$

此即证明了所给的曲线在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

【1595】 求双曲线 $xy=1$ 在下列各点的曲率半径和曲率中心：

(1) $M(1,1)$； (2) $N(100,0.01)$.

解 $y=\frac{1}{x}$， $y'=-\frac{1}{x^2}$， $y''=\frac{2}{x^3}$.

(1) 在点 $M(1,1)$，$y=1$，$y'=-1$，$y''=2$. 于是，曲率半径为

$$R=\frac{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2}=\sqrt{2},$$

曲率中心 (ξ,η) 为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=1-\frac{-1(1+1)}{2}=2,\quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=1+\frac{2}{2}=2.$$

(2) 在点 $N(100,0.01)$. $y=0.01$，$y'=-0.0001$，$y''=0.000002$.

与(1)相似，代入公式，近似地有曲率半径 $R=500000$ 和曲率中心为 $(150,500000)$.

求下列曲线的曲率半径：

【1596】 抛物线 $y^2=2px$.

解 $y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p}{y^2}y'=-\frac{p^2}{y^3}$. 于是，曲率半径为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}=p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}=p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

【1597】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 不妨设 $a>b$. 由于

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{(a^4b^2-a^2b^2x^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{a^3b^3\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

【1598】 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于 $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$，$y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$，于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{(a^2b^2x^2-a^4b^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$=\frac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率.

【1599】 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$y''=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$，于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|}=\left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right|=3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

【1600】 椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2t}\right)}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3t},$$

于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^2\cot^2t}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2|\sin t|^3}}=\frac{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{a^3\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2t)^{\frac{3}{2}},$$

其中 ε 为椭圆的离心率.

【1601】 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\cot^2\dfrac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2\sqrt{2ay}.$$

【1602】 圆的渐伸线

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

解 由于 $\dfrac{dy}{dx}=\tan t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{at\cos^3 t}$,于是,曲率半径为

$$R=\frac{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{a|t\cos^3 t|}}=a|t|.$$

【1603】 证明:二次曲线 $y^2=2px-qx^2$ 的曲率半径与法线段的立方成正比.

证明思路 注意到曲率半径为 $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$,法线段为 $l=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$,即知 $\dfrac{R}{l^3}=\dfrac{1}{|y^3y''|}$. 可以证明 $y^3y''=-p^2$.

证 曲线的曲率半径公式为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|,$$

因此,$\dfrac{R}{l^3}=\dfrac{1}{|y^3y''|}$. 下面求 y^3y'':

因为 $y^2=2px-qx^2$,故在等式两端分别对 x 求两次导数,即得

$$2yy'=2p-2qx \quad 或 \quad yy'=p-qx, \tag{1}$$
$$yy''+y'^2=-q. \tag{2}$$

以 y^2 乘(2)式两端,并以(1)式及原二次曲线的表达式代入左右端,即得

$$y^3y''+(p-qx)^2=-q(2px-qx^2);$$

化简之,最后得

$$y^3y''=-p^2.$$

因此,$\dfrac{R}{l^3}=\dfrac{1}{p^2}$ 为一常数. 证毕.

【1604】 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

提示 由 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$,其中 $r=r(\varphi)$,求出 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 后,易得

$$R=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|},$$

其中 $r'=\dfrac{dr}{d\varphi}$, $r''=\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}$.

解 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$，则由

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

可求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{r^2+2r'r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3},$$

其中 $r'=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$，$r''=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}$. 于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表示的曲线的曲率半径：

【1605】 阿基米德螺线 $r=a\varphi$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 由于 $r'=a$，$r''=0$，于是，曲率半径为

$$R=\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}.$$

【1606】 对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 由于 $r'=mae^{m\varphi}=mr$，$r''=m^2r$，于是，曲率半径为

$$R=\frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+m^2r^2}=r\sqrt{1+m^2}.$$

【1607】 心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 $r'=-a\sin\varphi$，$r''=-a\cos\varphi$. 于是，曲率半径为

$$R=\frac{[a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\varphi)^2+2a^2\sin^2\varphi+a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)}=\frac{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\varphi)}=\frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

【1608】 双纽线 $r^2=a^2\cos2\varphi$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 $r'=-\frac{a^2\sin2\varphi}{r}$，$r''=-\frac{r^4+a^4}{r^3}$，

$$r^2+2r'^2-rr''=\frac{3a^4}{r^2},\quad (r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^6}{r^3}.$$

于是，曲率半径为

$$R=\frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}}=\frac{a^2}{3r}.$$

【1609】 在曲线 $y=\ln x$ 上求曲率最大的点.

解题思路 先求出曲率半径

$$R=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

由题设，我们只要考虑函数 $f(x)=\frac{(1+x^2)^3}{x^2}$ 当 x 取何值时达到最小值.

解 由于 $y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，所以，曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设，我们只要考虑函数

$$f(x)=\frac{(1+x^2)^3}{x^2}$$

当 x 取何值时达到最小值. 由于

$$f'(x)=\frac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3},$$

故令 $f'(x)=0$ 求得正根 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x)>0$. 因此，当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f(x)$ 取极小值. 又由于只有一个极小值，故也是最小值.

这样一来，当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y=-\frac{\ln 2}{2}$ 时，曲率半径为最小，也即曲率为最大. 因此，所求的点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\ln 2}{2}\right)$.

【1610】 三次抛物线 $y=\frac{kx^3}{6}$ $(0\leqslant x<+\infty, k>0)$ 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$，求达到此最大曲率的点 x.

解 为方便起见，令 $c=\frac{k}{6}$. 因为 $y'=3cx^2$，$y''=6cx$，所以，曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}}\quad(x\geqslant 0).$$

由 $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}=6c\,\frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3}=0$，得 $x_0^4=\frac{1}{45c^2}$.

可证 $\left.\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}<0$，又根据条件，$K(x_0)$ 为 $K(x)$ 的最大值，且有

$$K(x_0)=\frac{6c\sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1+9c^2\cdot\frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6\sqrt{c}\sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{10^3},$$

解之，得 $c=\frac{18\sqrt{5}}{5^3\times 10^6}$，从而，

$$x_0^2=\frac{1}{\sqrt{45}\,c}=\frac{5^2\times 10^6}{54}\quad 或\quad x_0=\sqrt{\frac{5^2\times 10^6}{54}}\approx 680,$$

此即达到最大曲率的点.

求下列各曲线的渐屈线方程：

【1611】 抛物线 $y^2=2px$.

解 由于 $y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p^2}{y^3}$，故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=x+\frac{2px+p^2}{p}=3x+p,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y-\frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}}=-\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x=\frac{\xi-p}{3},\quad y^3=-p^2\eta. \tag{1}$$

由于 $y^6=8p^3x^3$，故将(1)式代入后，消去 x 及 y，即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2=8(\xi-p)^3.$$

【1612】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于 $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}, y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$，故曲率中心的坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\frac{\frac{b^2x}{a^2y}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{\frac{b^4}{a^2y^3}}=x-\frac{b^2xa^2y^3(a^4y^2+b^4x^2)}{a^6y^3b^4}$$

$$=x-\frac{xa^2b^2\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)}{a^4b^2}=x-\frac{x\left(a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\right)}{a^2}=\frac{c^2}{a^4}x^3,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y-\frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}=y-\frac{y(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}=y-\frac{ya^2b^2\left(b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2\right)}{a^2b^4}=-\frac{c^2}{b^4}y^3,$$

即

$$c^2y^3=-b^4\eta,\quad c^2x^3=a^4\xi.$$

于是，

$$c^{\frac{4}{3}}y^2=b^{\frac{8}{3}}\eta^{\frac{2}{3}},\quad c^{\frac{4}{3}}x^2=a^{\frac{8}{3}}\xi^{\frac{2}{3}},$$

从而，将 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$，$\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$ 相加即得渐屈线方程为

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2=a^2-b^2$. 它为一星形线.

【1613】 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$，$y''=\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$，故曲率中心的坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}}=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

于是，

$$\xi+\eta=(x+y)+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})[(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}]=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3,$$

$$\xi-\eta=(x-y)-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})[(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}]=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3,$$

因此，

$$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2+(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2=2(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{2}{3}},$$

此即所求的渐屈线方程，它仍为一星形线.

【1614】 曳物线 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$.

解 先求 y' 和 y''. 在等式

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$$

两端分别对 x 求导，得

$$1=a\left(\frac{-1}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\cdot\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}-\frac{y'}{y}\right)+\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

化简得

$$y'=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}. \tag{1}$$

再将(1)式两端分别对 x 求导并以(1)式代入，化简即得

$$y''=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}.$$

于是，曲率中心的坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}=x+\sqrt{a^2-y^2},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{\dfrac{a^2}{a^2-y^2}}{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}=\frac{a^2}{y}.$$

由于点(x,y)的坐标 x 和 y，适合方程

$$x+\sqrt{a^2-y^2}=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

故

$$\xi=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{\frac{\xi}{a}}. \tag{2}$$

将(2)式分子有理化，得

$$\frac{a^2-(a^2-y^2)}{y(a-\sqrt{a^2-y^2})}=e^{\frac{\xi}{a}},$$

即

$$\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{-\frac{\xi}{a}}. \tag{3}$$

(2)+(3)并除以 2，即得

$$\frac{a}{y}=\operatorname{ch}\frac{\xi}{a},$$

从而得

$$\eta=a\operatorname{ch}\frac{\xi}{a},$$

此即所要求的渐屈线方程，它为一悬链线.

【1615】 对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$.

解 利用直角坐标与极坐标的互化公式来求渐屈线方程. 首先，我们有

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+m\arctan\frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{m(xy'-y)}{x^2+y^2},$$

即

$$x+yy'=m(xy'-y). \tag{1}$$

由(1)式即得

$$y'=\frac{x+my}{mx-y}.$$

由(1)式再对 x 求导，化简得

$$y''=\frac{1+y'^2}{mx-y}.$$

以 y' 及 y'' 代入曲率中心的表达式中，化简整理得

$$\xi=-my,\quad \eta=mx. \tag{2}$$

设 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，$\psi=\arctan\frac{\eta}{\xi}$，于是，由(2)式得

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2=m^2(x^2+y^2), & (3)\\ -\dfrac{\xi}{\eta}=\dfrac{y}{x}. & (4)\end{cases}$$

(3) 式即 $\rho=mr=mae^{m\varphi}$，(4) 式即 $-\cot\psi=\tan\varphi$ 或 $\varphi=\psi-\frac{\pi}{2}$. 因此，最后我们得到所求的渐屈线方程为对数螺线

$$\rho=mae^{m(\psi-\frac{\pi}{2})}.$$

【1616】 证明：摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线，仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cot\frac{t}{2},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

于是，

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=a(t-\sin t)+\frac{\cot\frac{t}{2}\cdot\left(1+\cot^2\frac{t}{2}\right)}{\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}=a(t+\sin t),$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=a(\cos t-1).$$

令 $t-\pi=\tau$，即得

$$\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau),\quad \eta=-2a+a(1-\cos\tau),$$

此仍为摆线，显然，只是位置与原摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1° **比例法(弦线法)** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且

$$f(a)f(b)<0,$$

而当 $a<x<b$ 时，$f'(x)\neq 0$，则方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

在区间 (a,b) 内有而且仅有一个实根 ξ. 可取下面的值作为此根的第一个近似值：

$$x_1=a+\delta_1$$

式中 $\delta_1=-\dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$.

进而，对区间(a,x_1)和(x_1,b)中使函数$f(x)$在其两端异号的那一个区间运用此方法，得到根ξ的第二个近似值x_2，并不断重复此过程. 对于第n个近似值x_n，有以下估计：

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m},\tag{2}$$

其中$m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

2° **牛顿法(切线法)** 若在闭区间$[a,b]$内$f''(x)\neq0$，且$f(a)f''(a)>0$，则可取数值

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根ξ的第一个近似值ξ_1.

重复利用这个方法，很快就得到趋近于根ξ的一系列近似值$\xi_n(n=1,2,\cdots)$，这些近似值的精度可根据公式(2)来估计.

为了大致确定方程的根，最好作出函数$y=f(x)$的图像.

利用比例法，求下列方程的根(精确到0.001)：

【1617】 $x^3-6x+2=0$.

解 设$f(x)=x^3-6x+2$，则$f(x)$在$[0,1]$上连续及$f(0)=2$，$f(1)=-3$，且当$0<x<1$时，$f'(x)=3x^2-6x\neq0$. 因而，所给方程在$(0,1)$内有且仅有一实根ξ_1. 现求之，以x_i表示此根的第i个近似值，则有

$$x_1=0+\delta_1=-\frac{f(0)}{f(1)-f(0)}(1-0)=0.4;$$

又因$f(0.4)=-0.336$，故

$$x_2=-\frac{f(0)}{f(0.4)-f(0)}(0.4-0)=0.342;$$

$f(0.342)=-0.012$，故

$$x_3=-\frac{f(0)}{f(0.342)-f(0)}(0.342-0)=0.340;$$

由于$f(0.340)=-0.001$，$m_1=\inf\limits_{0<x<1}|f'(x)|=3$，因此，如果取0.340作为此根的第三个近似值，其误差为

$$|0.340-\xi_1|\leqslant\frac{|f(0.340)|}{m_1}<0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是，所给方程的一近似根为0.340.

再求其他的根：

因为$f(2)=-2$，$f(3)=11$，且当$2<x<3$时，$f'(x)\neq0$，故方程在$(2,3)$内有且仅有一实根ξ_2. 与求ξ_1的方法类似，依次求得其第i个近似值x_i为：

$$x_1=2-\frac{f(2)}{f(3)-f(2)}(3-2)=2.15;$$

$$x_2=2.15-\frac{f(2.15)}{f(3)-f(2.15)}(3-2.15)=2.22;$$

$$x_3=2.22-\frac{f(2.22)}{f(2)-f(2.22)}(3-2.22)=2.245;$$

$$x_4=2.245-\frac{f(2.245)}{f(3)-f(2.245)}(3-2.245)=2.256;$$

$$x_5=2.256-\frac{f(2.256)}{f(3)-f(2.256)}(3-2.256)=2.260;$$

$$x_6=2.260-\frac{f(2.260)}{f(3)-f(2.260)}(3-2.260)=2.261;$$

$$x_7=2.261-\frac{f(2.261)}{f(3)-f(2.261)}(3-2.261)=2.262.$$

由于$f(2.262)=0.003$，$m_2=\inf\limits_{2<x<3}|f'(x)|=6$，因此，如果取2.262作为$\xi_2$的第七个近似值，则其误差为

$$|2.262-\xi_2|\leqslant\frac{|f(2.262)|}{m_2}<0.001,$$

已达到所需的精确度.于是,所给方程的一近似根为2.262.

由于此方程为一个三次方程,最后必然还有一实根.

因为$f(-2)=6,f(-3)=-7$,且当$-3<x<-2$时,$f'(x)\neq0$,故此根ξ_3介于-3和-2之间.同上法依次求得其第i个近似值x_i为:

$$x_1=-3-\frac{f(-3)}{f(-2)-f(-3)}(-2+3)=-2.461;$$

$$x_2=-3-\frac{f(-3)}{f(-2.461)-f(-3)}(-2.461+3)=-2.574;$$

$$x_3=-3-\frac{f(-3)}{f(-2.574)-f(-3)}(-2.574+3)=-2.596;$$

$$x_4=-3-\frac{f(-3)}{f(-2.596)-f(-3)}(-2.596+3)=-2.601;$$

$$x_5=-3-\frac{f(-3)}{f(-2.601)-f(-3)}(-2.601+3)=-2.602.$$

由于$f(-2.602)=-0.004,m_3=\inf\limits_{-3<x<-2}|f'(x)|=6$,因此,如果取$-2.602$作为$\xi_3$的第五个近似值,则其误差为

$$|-2.602-\xi_3|\leqslant\frac{|f(-2.602)|}{m_3}<0.001,$$

已达到所需的精确度.于是,所给方程的第三个根的近似值为-2.602.

【1618】 $x^4-x-1=0$.

解 设$f(x)=x^4-x-1$.由于$f(1)=-1,f(2)=13$,且当$1<x<2$时,$f'(x)\neq0$,故所给方程在$(1,2)$内有且仅有一实根ξ_1,按1617题的方法,依次求得该根的第i个近似值x_i为:

$x_1=1.07$; $x_2=1.12$; $x_3=1.156$; $x_4=1.180$; $x_5=1.196$; $x_6=1.205$; $x_7=1.217$; $x_8=1.220$; $x_9=1.221$.

由于$f(1.221)=0.002$, $m_1=\inf\limits_{1<x<2}|f'(x)|=3$,因此,如果取1.221作为$\xi_1$的第九个近似值,则其误差为

$$|1.221-\xi_1|\leqslant\frac{|f(1.221)|}{m_1}<0.001,$$

已达到所需的精确度.于是,所给方程的一近似根为1.221.

又因$f(-1)=1,f(-0.5)=-0.4375$,且当$-1<x<-0.5$时,$f'(x)\neq0$,故所给方程在$(-1,-0.5)$内有且仅有一实根ξ_2,依次求得第i个近似值x_i为:

$x_1=-0.652$; $x_2=-0.789$; $x_3=-0.706$; $x_4=-0.719$; $x_5=-0.723$; $x_6=-0.724$.

由于$f(-0.724)=-0.001$, $m_2=\inf\limits_{-1<x<-0.5}|f'(x)|=1$,因此,如果取$-0.724$作为$\xi_2$的第六个近似值,则其误差为

$$|-0.724-\xi_2|\leqslant\frac{|f(-0.724)|}{m_2}=0.001,$$

已达到所需的精确度.于是,所给方程的另一近似根为-0.724.

由于$f'(x)=4x^3-1=0$只有一实根,且$f''(x)=12x^2>0(x\neq0)$,故所给方程仅有二实根,其余二根为一对共轭复根.

【1619】 $x-0.1\sin x=2$.

解 设$f(x)=x-0.1\sin x-2$,则$f(2)=-0.091,f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0.0237$,且当$2<x<\frac{2\pi}{3}$时,$f'(x)\neq0$,故所给方程在$\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$内有且仅有一实根$\xi_1$,依次求得其第$i$个近似值$x_i$为:

$x_1=2.075$; $x_2=2.080$; $x_3=2.083$; $x_4=2.087$.

由于 $f(2.087)=0.00003$，$m_1=\inf\limits_{2<x<\frac{3\pi}{2}}|f'(x)|=1-0.1\cos 2^{*)}\approx 0.959$，因此，如果取 2.087 作为 ξ_1 的第四个近似值，则其误差为

$$|2.087-\xi_1|\leqslant\frac{|f(2.087)|}{m_1}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的近似根为 2.087(弪)．

又方程 $x-0.1\sin x=2$ 与方程 $x-2=0.1\sin x$ 等价，而曲线 $y=x-2$ 与 $y=0.1\sin x$ 只有一个交点，因此，原方程只有一个实根．

*) 因 $f'(x)=1-0.1\cos x$，$f''(x)=0.1\sin x>0$，故 $m_1=|f'(2)|=1-0.1\cos 2$．以下同样情况不再说明．

【1620】 $\cos x=x^2$．

解 设 $f(x)=\cos x-x^2$，则因 $f(-x)=f(x)$，故原方程若有一根 ξ，必有另一根 $-\xi$．又曲线 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 只有两个交点．因此，原方程有且仅有两个根 $\pm\xi$．为此，只需求一正根即可．

由于 $f(\frac{\pi}{4})=0.09$，$f(1)=-0.46$，且当 $\frac{\pi}{4}<x<1$ 时，$f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(\frac{\pi}{4},1)$ 内有且仅有一实根 ξ，依次求得其第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=0.821;\quad x_2=0.828;\quad x_3=0.826;\quad x_4=0.825.$$

由于 $f(0.825)=-0.002$，$m=\inf\limits_{\frac{\pi}{4}<x<1}|f'(x)|=\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=2.278$，因此，如果取 0.825 作为 ξ 的第四个近似值，则其误差为

$$|0.825-\xi|\leqslant\frac{f(0.825)}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的二近似根为 ± 0.825．

如果注意到 $f(0.824)=0.002$，$f(0.825)=-0.002$，因此，取 ± 0.824 作为所给方程的二近似根，也可保证所需的精确度．

利用牛顿法，求下列方程的根(精确到所指定的精度)：

【1621】 $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ (精确到 10^{-3})．

解 曲线 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ 与 $y=10x$ 共有两个交点．因此，所给方程共有两个实根．

设 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}-10x$，则因 $f(0.4)=2.41$，$f(0.5)=-0.75$，且当 $0.4<x<0.5$ 时，$f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(0.4,0.5)$ 内有且仅有一实根．又由于在 $[0.4,0.5]$ 内 $f''(x)\neq 0$ 且 $f(0.4)f''(0.4)>0$，故利用牛顿法求近似根时，切点应取 $(0.4,f(0.4))$．依次求得其第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=0.4-\frac{f(0.4)}{f'(0.4)}=0.459;$$

$$x_2=0.459-\frac{f(0.459)}{f'(0.459)}=0.471;$$

$$x_3=0.471-\frac{f(0.471)}{f'(0.471)}=0.472.$$

今估计误差：$f(0.472)=-0.013$．由于 $f'(x)$ 在 $(0.4,0.5)$ 内为增函数，且为负的，故

$$m=\inf\limits_{0.4<x<0.5}|f'(x)|=|f'(0.5)|=25.$$

因此，如果取 0.472 作为根的近似值，则其误差为

$$|0.472-\xi|\leqslant\frac{f(0.472)}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 0.472．

现求第二个近似根，由于 $f(10)=0.001$，故此根可能逼近 10. 现分别以 9.9 及 9.99 试之：

$$f(9.9)=-0.98,\qquad f(9.99)=-0.09.$$

因此，$f(9.99)f(10)<0$，加以在 $(9.99,10)$ 内 $f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(9.99,10)$ 内有且仅有一实根. 又因 $f(10)f''(10)>0$ 及 $f''(x)\neq 0$，故利用牛顿法求近似根时，切点应选在 $(10,f(10))$ 处. 于是，

$$x_1=10-\frac{f(10)}{f'(10)}=9.99999,$$

如果取 9.999 作为根的近似值，则其误差显然已达到所需的精确度. 于是，所给方程的又一近似根为 9.999.

【1622】 $x\lg x=1$ （精确到 10^{-4}）.

解 曲线 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 只有一个交点. 因此，所给方程只有一个实根. 现确定其范围. 设 $f(x)=x\lg x-1$，由于 $f(2.506)=-0.0004$，$f(2.507)=0.0005$，且当 $2.506<x<2.507$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故在 $(2.506,2.507)$ 内有且仅有一实根，切点选在 $(2.507,f(2.507))$. 依次求得其第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=2.5064;\quad x_2=2.5062.$$

由于

$$f(2.5062)=0.00002,\quad m=\inf_{2.506<x<2.507}|f'(x)|=|f'(2.506)|=0.84,$$

因此，如果取 2.5062 作为根的近似值时，则其误差为

$$|2.5062-\xi|\leqslant\frac{|f(2.5062)|}{m}<0.0001,$$

已达到所需的精确度，故所求的唯一近似根为 2.5062.

【1623】 $\cos x\operatorname{ch}x=1$ （精确到 10^{-3}） （二正根）.

解 曲线 $y=\cos x$ 与 $y=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$ 的交点有无穷多个，其中最小的三个正根分别记为 α,β,γ，且

$$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi,\quad 2\pi<\beta<\frac{5\pi}{2},\quad \frac{7\pi}{2}<\gamma<4\pi.$$

现在我们将求 α 与 γ 两正根的计算方法叙述如下. 设 $f(x)=\cos x\operatorname{ch}x-1$.

(1) 先求 α.

由于 $f(4.7)=-1.6812$，$f(4.8)=4.3159$，故知 $4.7<\alpha<4.8$. 又因在 $(4.7,4.8)$ 内 $f''(x)>0$，故切点应取在 $(4.8,f(4.8))$ 处，依次求得 α 的第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=4.7345;\quad x_2=4.7301.$$

本题若采用 $\frac{|f(x_n)|}{m}$ 估计误差，由于 m 本身也需估计，而且繁琐，今用比例法与牛顿法联合使用求根的近似值. 设以右上角带“′”的 x_i' 表示用比例法求出的第 i 个近似值，则有

$$x_1'=4.7-\frac{f(4.7)}{f(4.8)-f(4.7)}(4.8-4.7)=4.7280,$$

从而知

$$4.7280<\alpha<4.7345.$$

于是，

$$x_2'=4.7280-\frac{f(4.7280)}{f(4.7345)-f(4.7280)}(4.7345-4.7280)=4.7300.$$

因此，

$$4.7300<\alpha<4.7301.$$

取 4.730 作为 α 的近似值，即可保证所需的精确度. 于是，所给方程的一正根的近似值为 4.730.

(2) 再求 γ.

由于 $f(\frac{7\pi}{2})=-1$，$f(11)\approx 133$，故知 $\frac{7\pi}{2}<\gamma<11$. 切点取在 $(11,f(11))$ 处. 分别用比例法及牛顿法求得

$$x_1'=10.9956,\quad x_1=10.9956,$$

因而取 10.996 作为 γ 的近似值，即可保证所需的精确度. 于是，所给方程的又一正根的近似值为 10.996.

【1624】 $x+e^x=0$ （精确到 10^{-5}）.

解 设 $f(x)=x+e^x$，则 $f'(x)=1+e^x>0$，$f''(x)=e^x>0$. 由于 $f(0)=1$，$f(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，故在 $(-1,0)$ 内所给方程有且仅有一实根，切点选在 $(0,f(0))$ 处. 依次求得此根的第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=-0.5;\quad x_2=-0.56631;\quad x_3=-0.567132;\quad x_4=-0.567145.$$

由于

$$|x_4-\xi|\leqslant\frac{|f(-0.567145)|}{m}=\frac{|f(-0.567145)|}{1+e^{-1}}<10^{-5},$$

故取 -0.56715 作为根的近似值，即可保证所需的精确度.

由于曲线 $y=e^x$ 与 $y=-x$ 只有一个交点，故上述近似根 -0.56715 即为所给方程的唯一近似根.

【1625】 $x\operatorname{th}x=1$ （精确到 10^{-6}）.

解 设 $f(x)=\operatorname{th}x-\frac{1}{x}$，则因曲线 $y=\operatorname{th}x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 仅有两个交点，故所给方程仅有二实根. 又因在 $x\operatorname{th}x$ 中以 $-x$ 代 x，其值不变，故方程的二实根为 $\pm\xi$.

由 $f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{1}{x^2}>0$，知 $f(x)$ 是增函数. 又因 $f(1)=-0.2384$，$f(2)=0.4640$. 故所给方程在 $(1,2)$ 内有且仅有一实根. 又

$$f''(x)=-\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x}-\frac{2}{x^3}<0\quad(x>0),$$

因此，切点应选为 $(1,f(1))$. 仍以 x_i' 及 x_i 分别表示用比例法及牛顿法求得的根的第 i 次近似值，重复使用，即得

$$x_1'=1.339,\quad x_1=1.168,$$

故 $1.168<\xi<1.339$.

$$x_2'=1.2032,\quad x_2=1.1989,$$

有 $1.1989<\xi<1.2032$.

$$x_3'=1.1996796,\quad x_3=1.1996781,$$

故 $1.1996781<\xi<1.1996796$.

于是，取 ±1.199678 作为根的近似值，即可保证所需的精确度.

【1626】 求方程 $\tan x=x$ 最小的三个正根（精确到 0.001）.

解 由 $y=\tan x$ 及 $y=x$ 的图像知方程有正根，且有无穷个，只求其最小三正根，设 $f(x)=\tan x-x$.

(1) 由于 $f'(x)=\tan^2x>0$，$f''(x)=2\tan x\sec^2x>0\left(x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ 及 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)f\left(\frac{23\pi}{16}\right)<0$，故在 $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{23\pi}{16}\right)$ 内所给方程有且仅有一实根 ξ_1，切点应选在 $\left(\frac{23\pi}{16},f\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$ 处. 依次求得 ξ_1 的第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=4.4959;\quad x_2=4.4933.$$

由于 $|f(4.4933)|=0.0012$，$m=\inf\limits_{\frac{4\pi}{3}<x<\frac{23\pi}{16}}|f'(x)|=\tan^2\frac{4\pi}{3}=3$，因此，如果取 4.493 作为根 ξ_1 的近似值，则其误差为

$$|x_2-\xi_1|\leqslant\frac{|f(4.4933)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是，所给方程的一最小正近似根为4.493.

(2) 再求第二个最小正根.

由于 $f\left(\frac{23\pi}{16}\right)<0$，$f\left(\frac{79\pi}{32}\right)>0$，故在 $\left(\frac{39\pi}{16},\frac{79\pi}{32}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_2. 又因在此区间内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故切点应选在 $\left(\frac{79\pi}{32},f\left(\frac{79\pi}{32}\right)\right)$ 处. 依次求得 ξ_2 的第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=7.7325;\quad x_2=7.7258;\quad x_3=7.7254,$$

由于$|f(7.7254)|=0.0083$，$m=\inf\limits_{\frac{39\pi}{16}<x<\frac{79\pi}{32}}|f'(x)|=\tan^2\frac{39\pi}{16}>25$，因此，如果取 7.725 作为 ξ_2 的近似值，则其误差为

$$|x_3-\xi_2|\leqslant\frac{|f(7.7254)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度.于是，所给方程的第二个最小正根的近似值为 7.725.

(3)最后求第三个最小正根.

由于 $f(\frac{111\pi}{32})<0$，$f(\frac{223\pi}{64})>0$，故在$(\frac{111\pi}{32},\frac{223\pi}{64})$内方程有且仅有一实根 ξ_3.又因在此区间内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故切点应选在$(\frac{223\pi}{64},f(\frac{223\pi}{64}))$处.依次求得 ξ_3 的第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=10.9233;\quad x_2=10.9086;\quad x_3=10.9041.$$

由于$|f(10.9041)|=0.014$，$m=\tan^2\frac{111\pi}{32}=102.78$.因此，如果取 10.904 作为 ξ_3 的近似值，则其误差为

$$|x_3-\xi_3|\leqslant\frac{|f(10.9041)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度.于是，所给方程的第三个最小正根的近似值为 10.904.

【1627】 求方程 $\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$的二正根(精确到 10^{-3}).

解 由 $y=\cot x$ 与 $y=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$的图像知交点有无穷个，我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2：

$$\frac{\pi}{2}<\xi_1<\pi,\quad \frac{3\pi}{2}<\xi_2<2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1.

设 $f(x)=\cot x-\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$，则在所考虑的区间内

$$f'(x)=-\cot^2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}<0,\quad f''(x)=\frac{2\cos x}{\sin^3x}-\frac{2}{x^3}<0.$$

又因 $f(2.0708)=0.0062$，$f(2.1708)=-0.0593$，故切点应选在$(2.1708,f(2.1708))$处.用比例法与牛顿法联合求 ξ_1.重复应用，即得

$$x_1'=2.0803,\quad x_1=2.0923,$$

故 $2.0803<\xi_1<2.0923$.

$$x_2'=2.0815,\quad x_2=2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值，即可保证所需的精确度.于是，所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2.

由于 $f(5.9324)=0.0648$，$f(5.9424)=-0.0169$，故

$$5.9324<\xi_2<5.9424,$$

切点取$(5.9424,f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次，即得

$$x_1'=5.9403,\quad x_1=5.9404,$$

因此，取 5.940 作为 ξ_2 的近似值，即可保证所需的精确度.于是，所给方程的又一正根的近似值为 5.940.